# Equations de Dirac dans un espace-temps courbe : Mécanique quantique


*Mayeul Arminjon*

*CNRS (Sect. 2)*

*Labo. "Sols, Solides, Structures – Risques", Grenoble*



CITV, Aix-en-Provence, 31 août - 4 septembre 2009

# Position du problème

- Dans le travail précédent, on a obtenu deux équations de Dirac alternatives dans un espace-temps courbe, en appliquant directement la correspondance classique-quantique. On a donc trois éqs de Dirac.
- Il faut donc étudier la mécanique quantique associée à chacune de ces trois éqs :
  - définition du courant de probabilité & sa conservation,
  - définition du produit scalaire pertinent,
  - l'opérateur hamiltonien & son *hermiticité* (ou pas).
- Beaucoup peut être fait simultanément pour les trois versions, car elles ont la même forme. Les conclusions qualitatives pour les trois versions sont assez similaires, avec des différences non-négligeables.

## 3 équations de Dirac ds un espace-temps courbe

Les 3 équations de Dirac gravitationnelles ont la même *forme* :

$$\gamma^\mu D_\mu \psi = -im\psi, \tag{1}$$

où $\gamma^\mu = \gamma^\mu(X)$ ($\mu = 0, ..., 3$) = chp de matrices complexes $4 \times 4$ définies sur l'E-T $(\mathrm{V}, g_{\mu\nu})$, t.q.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4, \quad \mu, \nu \in \{0, ..., 3\} \quad (\mathbf{1}_4 \equiv \mathrm{diag}(1,1,1,1)); \tag{2}$$

et où $\psi$ est un chp de *bispineurs* pour l'éq usuelle (Dirac-Fock-Weyl ou *DFW*) mais est un chp de **4-vecteurs** pour les deux éqs alternatives, fondées sur la *représentation tensorielle des chps de Dirac (TRD)*;

et $D_\mu$ est une dérivée covariante, associée à une *connexion* spécifique. Pour DFW : "connex$^{\mathrm{n}}$ de spin", dépend du chp $(\gamma^\mu)$.

## Outil commun : les matrices hermitisantes

*Pour DFW,* on définit $\gamma^\mu = a^\mu{}_\alpha\, \gamma^{\sharp\alpha}$, où $u_\alpha = a^\mu{}_\alpha \partial_\mu$ est une tétrade orthonormée. Il faut étudier l'influence du choix de matrices de Dirac “plates” $(\gamma^{\sharp\alpha})$ et de la tétrade $(u_\alpha)$. On devrait pouvoir utiliser *tout* choix possible de $(\gamma^{\sharp\alpha})$.
*Pour TRD,* le 4-uplet $(\gamma^\mu)$ forme un tenseur, donc *n'est pas fixé.* Vrai même pour $(\gamma^{\sharp\alpha})$ si on définit encore $\gamma^\mu = a^\mu{}_\alpha\, \gamma^{\sharp\alpha}$.

Solution : utiliser la *matrice hermitisante* = une matrice $4 \times 4\ A$ t.q.

$$A^\dagger = A, \qquad (A\gamma^\mu)^\dagger = A\gamma^\mu \quad \mu = 0, ..., 3, \tag{3}$$

où $M^\dagger \equiv M^{*\,T}$ = conjugué hermitien de la matrice $M$. Pour les choix usuels $(\gamma^{\sharp\alpha})$ (Dirac, “chiral”, Majorana), $A = \gamma^{\sharp 0}$.

Nous avons prouvé l'existence de $A$ et de $B$ (pour matrices $\alpha^\mu$).

## Définition du courant de probabilité

Dans l'E-T plat, le courant est défini sans ambiguïté comme

$$J^\mu = \psi^\dagger A \gamma^\mu \psi. \tag{4}$$

La définition (4) est généralement-covariante : $J^\mu$ est un *4-vecteur,* pour DFW et pour TRD. Elle reste donc vraie pour un E-T courbe $(\mathrm{V}, g_{\mu\nu})$. (Mais $\gamma^\mu$, $A$ dépendent de $X \in \mathrm{V}$.)

Le courant (4) est *indépendant du choix des matrices de Dirac :* si on passe d'un chp $(\gamma^\mu)$ à un autre $(\tilde{\gamma}^\mu)$, le nouveau se déduit du premier par une *transformation de similarité locale* (=dépendant de $X \in \mathrm{V}$):

$$\exists S = S(X) \in \mathsf{GL}(4, \mathsf{C}) : \qquad \tilde{\gamma}^\mu(X) = S^{-1} \gamma^\mu(X) S, \quad \mu = 0, ..., 3, \tag{5}$$

Avec $\tilde{\psi} = S^{-1}\psi$ et $\tilde{A} = S^\dagger A S$ , on obtient bien $\tilde{J}^\mu = J^\mu$.

## Condition de conservation du courant

**Theorème 1.** *Considérons l'éq de Dirac générale (1) ds un E-T courbe – donc, soit DFW, soit une des deux équations TRD. Pour que toute solution* $\psi$ *de (1) vérifie la conservation du courant*

$$D_\mu J^\mu = 0, \tag{6}$$

*il faut et il suffit que*

$$D_\mu (A\gamma^\mu) = 0. \tag{7}$$

**Corollaire 1.** *Pour DFW, on peut prendre comme chp de matrice hermitisante* $A(X)$*, la matrice constante* $A^\sharp$*, i.e., une matrice hermitisante pour les matrices "plates"* $\gamma^{\sharp\alpha}$*. Alors la conservation du courant est vraie pour toute solution de l'équation DFW.*

**(M.A.– F. Reifler, arXiv:0807.0570, gr-qc)**

## Champs de coefficients admissibles

Selon le Theorème 1, les chps de coeffs possibles $(\gamma^\mu, A)$ de l'éq de Dirac ne sont pas tous physiquement admissibles, mais seulement ceux qui, en + de la relation d'anticommutation (2), vérifient l'éq de chp (7), assurant la conservation du courant. Appelons *"admissibles"* de tels systèmes $(\gamma^\mu, A)$ de champs.

Exemple : ds l' E-T *plat*, on peut considérer les chps $\gamma^\mu$ qui sont *constants en coordonnées cartésiennes* (et donc aussi le chp $A$). Ils vérifient la cond$^{\mathrm{n}}$ (7) pour la conservat$^{\mathrm{n}}$ du courant.

Si l'on choisit le chp $\gamma^\mu$ "au hasard", les solutions de l'éq de Dirac (1) ne vérifient généralement pas la condition (7) ni la conservation du courant, *même ds l'E-T plat* – sauf pour DFW.

## L'opérateur hamiltonien dépend du référentiel

L'éq de Dirac (1) se met sous la forme "Schrödinger" :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{H}\psi, \qquad (t \equiv x^0), \tag{8}$$

$$\mathrm{H} \equiv m\alpha^0 - i\alpha^j D_j - i(D_0 - \partial_0), \tag{9}$$

où

$$\alpha^0 \equiv \gamma^0/g^{00}, \qquad \alpha^j \equiv \gamma^0\gamma^j/g^{00}. \tag{10}$$

Pour que les hamiltoniens $\mathrm{H}$ and $\mathrm{H}'$, avant et après un changem$^{\mathrm{t}}$ de carte, soient équivalents comme opérateurs, le changem$^{\mathrm{t}}$ de carte doit être **spatial** : $x'^0 = x^0,\ x'^j = f^j((x^k))$. Alors, les 2 membres de l'éq de Schrödinger (8) sont "scalaires" pour DFW, et "vectoriels" pour TRD : **H dépend du référentiel** (congruence 3D de lignes d'univers) considéré. Fait général.

## Condition d'hermiticité du hamiltonien

**Théorème 5.** *Une condition* nécessaire *pour que le produit scalaire de deux fonctions d'onde indépendantes de* $t$ *soit indépendant de* $t$ *et que de plus le hamiltonien* $\mathrm{H}$ *soit un opérateur hermitien, est que le produit scalaire ait la forme*

$$(\psi \mid \varphi) \equiv \int \psi^\dagger A \gamma^0 \varphi \ \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}. \tag{11}$$

**Théorème 6.** *Soit un chp de coeffs* $(\gamma^\mu, A)$ *vérifiant les deux conditions d'admissibilité (2) and (7). Pour que le hamiltonian de Dirac (9) soit hermitien pour le produit scalaire (11), il faut et il suffit que*

$$\partial_0 \left(\sqrt{-g}\, A\gamma^0\right) = 0. \tag{12}$$

**Pb :** Condit$^{\mathrm{n}}$ pas stable par les transfos de similarité locales !!

## Instabilité de l'hermiticité : cas de DFW

For DFW, *all* local similarity transformations are admissible, since condition (7) is always satisfied (with the choice $A(X) \equiv A^\sharp$: see Corollary 1). Moreover, in very general coordinates, the tetrad $(a^\mu{}_\alpha)$ may be chosen to satisfy $a^0{}_j = 0$. Then $a^0{}_0 = \sqrt{g^{00}}$ from the orthonormality of the tetrad. Take for "flat" matrices $\gamma^{\sharp\,\alpha}$ standard Dirac matrices, for which $A = \gamma^{\sharp 0}$. Thus

$$B \equiv A\gamma^0 = \gamma^{\sharp 0}(a^0{}_0\gamma^{\sharp 0}) = \sqrt{g^{00}}\,\mathbf{1}_4. \tag{13}$$

The hermiticity condition (12) then reduces to Leclerc's (2006) :

$$\partial_0(\sqrt{-g\,g^{00}}) = 0. \tag{14}$$

But, after a local similarity $S$, the condition (12) becomes

$$\partial_0(\sqrt{-g\,g^{00}}\,S^\dagger S) = 0, \tag{15}$$

which *cannot* be satisfied if (14) is, and if moreover $S^\dagger S = F(t)$.

## Condition d'invariance du hamiltonien par une similarité locale (DFW)

On cherche quand une similarité locale $S(X)$, appliquée au champ des matrices de Dirac $\gamma^\mu$, laisse $\mathrm{H}$ (éq (9)) invariant :

$$\tilde{\mathrm{H}} = S^{-1}\,\mathrm{H}\,S. \tag{16}$$

C'est un calcul sans malice. Pour DFW, les matrices de la connexion, $\Gamma_\mu \equiv D_\mu - \partial_\mu$, changent :

$$\tilde{\Gamma}_\mu = S^{-1}\Gamma_\mu S + S^{-1}(\partial_\mu S). \tag{17}$$

On trouve simplement que la CNS pour avoir (16) est que $S(X)$ ne dépende pas du temps, $\partial_0 S = 0$. Dans le cas général $g_{\mu\nu,0} \neq 0$, tous les chps possibles $\gamma^\mu$ dépendent de $t$ : pas moyen de trouver une classe de chps $\gamma^\mu$ s'échangeant avec $\partial_0 S = 0$. I.e.: **le hamiltonien de Dirac n'est pas unique.**

## Condition d'invariance de l'opérateur Energie (DFW)

Lorsque le hamiltonien $\mathrm{H}$ n'est pas hermitien, on doit utiliser l'opérateur Energie. Coïncide avec la partie hermitienne de $\mathrm{H}$ :

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} + \frac{i}{2\sqrt{-g}} B^{-1}\, \partial_0 \left(\sqrt{-g}\, B\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{H} + \mathrm{H}^{\ddagger}\right), \quad B \equiv A\gamma^0. \qquad (18)$$

Un calcul sans plus de malice donne la condition d'invariance de $\mathrm{E}$ (pour DFW) :

$$B(\partial_0 S)S^{-1} - \left[B(\partial_0 S)S^{-1}\right]^{\dagger} \equiv 2\left[B(\partial_0 S)S^{-1}\right]^{a} = 0. \qquad (19)$$

Les similarités locales $S(X)$ vérifiant (19) sont très particulières. Il y a donc un problème d'unicité sérieux pour DFW (et aussi pour les éqs alternatives, TRD). Le *spectre* de $\mathrm{E}$ serait-il lui-même non-unique? Ce serait trop grave, non? Et pourtant...

## Expression explicite de l'opérateur Energie (DFW)

Expression générale du changement de $\mathrm{E}$ par similarité locale :

$$\delta \mathrm{E} \equiv S\tilde{\mathrm{E}}S^{-1} - \mathrm{E} = -iB^{-1}\left[B(\partial_0 S)S^{-1}\right]^a. \qquad (20)$$

Prenons encore une tétrade t.q. ${a^0}_j = 0$, d'où (13) et donc

$$\delta \mathrm{E} = -i\left[(\partial_0 S)S^{-1}\right]^a. \qquad (21)$$

$(\partial_0 S)S^{-1}$ = élément générique de $\mathcal{G}$, alg. de Lie de $\mathsf{Spin}(1,3)$ – dont les $s^{\alpha\beta} \equiv [\gamma^{\sharp\alpha}, \gamma^{\sharp\beta}]$ $(\alpha < \beta)$ forment une base. Ainsi

$$\delta \mathrm{E} = -i\left[\omega_{\alpha\beta}s^{\alpha\beta}\right]^a = -i\sum_{j,k=1}^{3}\omega_{jk}s^{jk} \qquad (22)$$

et, en $\mathrm{f}^{\mathrm{n}}$ de la Lorentz locale $L(X)$ qui définit $S(X) = \mathsf{S}(L(X))$, les 6 coeffs $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ dépendent arbitrairement de $X \in \mathrm{V}$.

## Cas où les matrices de Dirac sont les "chirales"

Si les matrices de Dirac $\gamma^{\sharp\alpha}$ sont les "chirales", on a

$$\delta\mathrm{E} = -i \sum_{j,k=1}^{3} \omega_{jk} s^{jk} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \qquad N \equiv -\frac{1}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma} \tag{23}$$

où $\vec{\theta} \equiv (\theta^k)$ avec $\theta^1 \equiv \omega_{23}$ (circulaire), et où $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_k)$ avec $\sigma_k$ = matrices de Pauli. En f$^{\mathrm{n}}$ des 3 réels $\omega_{jk},\ 1 \leq j < k \leq 3$, la matrice $N$ parcourt *toutes* les matrices hermitiennes $2 \times 2$ de trace nulle. Une telle matrice a 2 valeurs propres $\mu \in \mathbb{R}$ et $-\mu$, et une base orthogonale de vecteurs propres, resp. $u \in \mathbb{C}^2$ pour $\mu$ et $v$ pour $-\mu$.

## Non-unicité du spectre (DFW)

Une petite perturbation : $S(\varepsilon, X) = I + \varepsilon\,(\delta S)(X) + O(\varepsilon^2)$ modifie chaque valeur propre de $\mathrm{E}$ : $\delta\lambda = (\psi \mid \delta\mathrm{E}(\varepsilon)\psi) + O(\varepsilon^2)$ avec $\psi$ la fonction propre pour l'état non perturbé. Avec (23) et en décomposant : $\psi = (\phi, \chi)$, on trouve :

$$\delta\lambda = \int \psi^\dagger \delta\mathrm{E}\,\psi\, \underline{\sqrt{-g\,g^{00}}\;\mathrm{d}^3\mathbf{x}} = \int (\phi^\dagger N\phi + \chi^\dagger N\chi)\,\underline{\mathrm{dV}}. \qquad (24)$$

Soit $\mu > 0$. $\forall x$ ds la variété espace M, soit $N = N(x)$ t.q. $\phi(x)$ soit vecteur propre de $N(x)$ pour la valeur propre $\mu$, d'où

$$\phi^\dagger N\phi = \mu\,\phi^\dagger\phi, \quad \chi^\dagger N\chi \geq -\mu\,\chi^\dagger\chi, \qquad (25)$$

et $\geq$ devient $=$ seul$^{\mathrm{t}}$ si $\chi(x)\perp\phi(x)$. Ainsi $\delta\lambda > 0$ sauf si i) $\chi(x)\perp\phi(x)$ p.p. *et* ii) $\int \phi^\dagger\phi\,\mathrm{dV} = \int \chi^\dagger\chi\,\mathrm{dV}$. Rare ! i) $\Rightarrow J^\mu$ genre lumière p.p., *impossible* si $m > 0$ . cqfd.

## Conclusion

- Les 3 éqs de Dirac gravitationnelles étudiées ensemble, grâce à la matrice hermitisante $A$.
- La conservation du courant exige l'équation matricielle $D_\mu(A\gamma^\mu) = 0$. Ainsi, les chps a priori possibles de matrices de Dirac ne sont pas tous admissibles (sauf pour DFW).
- La condition d'hermiticité est $\partial_0 \left(\sqrt{-g}\, A\gamma^0\right) = 0$. Elle n'est pas stable par les transformations de similarité admissibles.
- L' opérateur hamiltonien $\mathrm{H}$ n'est pas unique : il dépend du choix admissible du chp de matrices de Dirac. Idem pour l'opérateur Energie $\mathrm{E}$. Vrai pour DFW et pour TRD.
- Le *spectre* de $\mathrm{E}$ lui-même n'est pas unique. Tous ces résultats sont déjà vrais ds E-T *plat* en référentiel non inertiel.