L'équation de Dirac : obtention, transformation, cas gravitationnel

Mayeul Arminjon

CNRS (Sect. 2)

Labo. "Sols, Solides, Structures – Risques", Grenoble

CITV, Aix-en-Provence, 31 août - 4 septembre 2009

Mécanique quantique (MQ) ds le chp. de gravitation : ?

- Effets quantiques ds le chp. de gravitation classique : *observés* (modif de la phase d'onde, niveaux d'énergie).
- Gravité décrite par théories à espace-temps courbe.
- Ecriture usuelle des éqs d'onde ds E-T courbe : *covariantisation* (lié avec *principe d'équivalence*): l'éq cherchée ds E-T courbe V doit coïncider en $X \in \mathrm{V}$ avec version "plate" ds une carte où la connexion s'annule en X
- Pour l'éq de Dirac avec la transformation standard (spinorielle), ceci donne l'éq de Dirac-Fock-Weyl (DFW), qui n'obéit *pas* au principe d'équivalence stricto sensu.
- J'ai obtenu 2 éqs alternatives en *appliquant directement la correspondance classique-quantique*. $\Rightarrow$ 3 éqs de Dirac

Eq de dispersion d'une éq d'onde

Soit une équation (d'onde) linéaire d'ordre 2 :

$$\mathrm{P}\psi \equiv \ a_0(X)\psi + a_1^{\mu}(X)\partial_\mu \psi + a_2^{\mu\nu}(X)\partial_\mu \partial_\nu \psi = 0, \quad \mu, \nu = 0, ..., N, \tag{1}$$

où $X = (t, \mathbf{x}) \in \mathrm{V} \equiv$ espace de config$^{\mathrm{n}}$ étendu (= E-T si $N = 4$).

Chercher des solutions "onde plane locale" :
$\psi(X) = A \exp[i\theta(X)]$ avec, en X_0, $\partial_\nu K_\mu(X_0) = 0$, où
$K_\mu \equiv \partial_\mu \theta$: $\mathbf{K} = (K_\mu) = (-\omega, \mathbf{k}) =$ (co)vecteur d'onde,

conduit à *l'équation de dispersion :*

$$\Pi_X(\mathbf{K}) \equiv a_0(X) + i\, a_1^{\mu}(X) K_\mu + i^2 a_2^{\mu\nu}(X) K_\mu K_\nu = 0. \tag{2}$$

La substitution $K_\mu \to \partial_\mu / i$ détermine l'opérateur linéaire P *uniquement* à partir de la fonct$^{\mathrm{n}}$ polynomiale $(X, \mathbf{K}) \mapsto \Pi_X(\mathbf{K})$.

La correspondance classique-quantique

Relation(s) de dispersion : $\omega = W(\mathbf{k}; X)$, fixent le mode d'onde. Obtenues en résolvant $\Pi_X(\mathbf{K}) = 0$ pour $\omega \equiv -K_0$. Witham : la propagation de $\mathbf{k}$ est régie par un *système Hamiltonien :*

$$\frac{\mathrm{d}k_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial W}{\partial x^j}, \qquad \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial W}{\partial k_j} \qquad (j = 1, ..., N). \tag{3}$$

Mécanique ondulatoire : "le Hamiltonien classique H décrit le squelette d'un réseau d'ondes." Alors, l'éq d'onde doit donner une dispersion W ayant les mêmes trajectoires Hamiltoniennes que H. Solution la + simple : supposer H et W proportionnels, $H = \hbar W$... *Donne d'abord* $E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, *i.e.*

$$p_\mu = -\hbar K_\mu \quad \mu = 0, ..., N \qquad (p^0 \equiv E,\ p_\mu \equiv g_{\mu\nu} p^\nu). \tag{4}$$

Puis, substituant $K_\mu \to \partial_\mu / i$, *donne la correspondance entre un Hamiltonien classique et un opérateur d'ondes.* (Nuovo Cim. 1999)

La correspondance classique-quantique a lieu ds des classes privilégiées de cartes

Le polynôme de dispersion $\Pi_X(\mathbf{K})$ et la condition $\partial_\nu K_\mu(X) = 0$ ne restent invariants que si l'on se limite à des changements de carte "linéaires dans l'infinitésimal", i.e., t.q. l'on ait au point $X((x_0^\mu)) = X((x_0'^\rho))$ considéré :

$$\frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0, \quad \mu, \nu, \rho \in \{0, ..., N\}, \text{ pour } Y = X. \tag{5}$$

Ceci définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}_X$ entre les cartes $\chi : Y \mapsto (x^\mu)$ définies ds un voisinage de $X \in \mathrm{V}$. On doit donc se donner, $\forall X \in \mathrm{V}$, une classe d'équivalence $\mathcal{C}_X$ de cartes modulo $\mathcal{R}_X$. De façon équivalente, on peut se donner une *connexion sans torsion* sur TV, caractérisée par le fait que, $\forall \chi \in \mathcal{C}_X$, ses coefficients s'annulent en X. La condition d'onde plane locale s'écrit alors $D_\nu K_\mu(X_0) = 0$ et la correspondance s'écrit $K_\mu \to D_\mu / i$. (M.A.: *Found. Phys.* **38**, 1020–1045, 2008)

Deux classes privilégiées de cartes

$\star$ Dans E-T lorentzien général $(\mathrm{V}, \boldsymbol{g})$, une classe $\mathcal{C}_X$ de cartes modulo $\mathcal{R}_X$ se présente naturellement ($\forall X \in \mathrm{V}$) : les *cartes localement-géodésiques* en X pour $\boldsymbol{g}$, *i.e.*,

$$g_{\mu\nu,\rho}(X) = 0, \qquad \mu, \nu, \rho \in \{0, ..., N\}. \tag{6}$$

Cette classe correspond bien sûr à la *connexion de Levi-Civita*.

$\star$ Supposons donné un *référentiel privilégié*, i.e. une classe d'équivalence de cartes par les changements d'espace seul :

$$\chi \mathcal{S} \chi' \Longleftrightarrow x'^0 = x^0, \quad x'^j = \phi^j((x^k)). \tag{7}$$

On considère alors la classe des cartes qui s'échangent par :

$$x'^0 = x^0, \quad x'^j = \phi^j((x^k)), \quad \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^k \partial x^l}(X) = 0. \tag{8}$$

La connexion Δ associée à la deuxième classe (celle déduite d'un référentiel privilégié R) est l'unique connexion sur V dont les coefficients sont donnés, *ds les cartes (8) liées à* R, par

$$\Delta^{\mu}_{\rho\nu} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mu = 0 \quad \text{ou} \quad \nu = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = 0 \\ \\ \Delta^{j}_{lk} & \text{si} \quad \mu = j \quad \text{et} \quad \nu = k \quad \text{et} \quad \rho = l \in \{1,2,3\}, \end{cases} \tag{9}$$

les Δ^{j}_{lk} $(j,k,l \in \{1,2,3\})$ étant les symboles de Christoffel de la métrique *spatiale* $\boldsymbol{h}$ du référentiel privilégié (déduite de la métrique d'E-T $\boldsymbol{h}$).

(On montre qu'il existe une et une seule connexion dont les coeffs s'écrivent sous la forme (9) ds les cartes (8) liées à R (mais sont aussi définis dans n'importe quelle carte de l'atlas de V).)

Hamiltonien, de polynomial à algébrique

Pour une particule non-relativiste, le Hamiltonien H est *polynomial* en l'impulsion $\mathbf{p}$ (à X fixé) :

$$H(\mathbf{p}, X) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(X), \tag{10}$$

et la correspondence classique-quantique donne l'éq de Schrödinger. Mais pour une particule relativiste (disons libre), H est seulement *algébrique* en $\mathbf{p}$:

$$Q(E, \mathbf{p}) \equiv E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 - m^2 c^4 = 0 \quad \text{si} \quad E = H(\mathbf{p}). \tag{11}$$

Appliquer la correspondance à (11), donne l'éq de *Klein-Gordon.* Le problème : (11) a aussi la solution $H' = -H$. Donc, l'éq de K-G aura *trop de solutions,* comme l'éq de dispersion (11).

Une variante pour arriver à l'éq de Dirac

Il est donc tentant d'essayer de *factoriser* l'éq de dispersion associée à la relation algébrique (11):

$$\Pi(\mathbf{K}) \equiv (g^{\mu\nu} K_\mu K_\nu - m^2)1 = (\alpha + i\gamma^\mu K_\mu)(\beta + i\zeta^\nu K_\nu). \qquad (12)$$

En identifiant les coeffs. ds (12) (algèbre non-commutative) et en substituant $K_\mu \to D_\mu / i$ *où* D_μ *= dérivée covariante pour la connexion choisie, on obtient l'éq de Dirac :*

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi = 0. \qquad (13)$$

Cette obtention de l'éq de Dirac fonctionne aussi en présence d'un chp électromag., et aussi en présence d'un chp de gravitation représenté par une métrique lorentzienne générale. (M.A.: *Found. Phys. Lett.* **19**, 225–247, 2006; *Found. Phys.* **38**, 1020–1045, 2008)

Transformation de l'équation de Dirac

On demande qu'après un changement de carte $L \in \mathrm{G}$, avec G un groupe linéaire, la fonction d'onde de Dirac ψ devienne

$$\psi'(X') = S.\psi(X), \qquad S = \mathsf{S}(L), \tag{14}$$

pour une certaine fonction S de l'opérateur L. Il faut que S soit une représentation $\mathrm{G} \rightarrow \mathsf{GL}(4, \mathsf{C})$. L'éq de Dirac "plate" devient

$$(i\gamma'^{\nu}\,\partial'_{\nu} - m)\psi' = 0, \quad \gamma'^{\nu} \equiv L^{\nu}_{\mu} S \gamma^{\mu} S^{-1}. \tag{15}$$

Affirmation usuelle : "*Relativité* $\Rightarrow \gamma'^{\nu} = \gamma^{\nu}$" ($\rightarrow$ représentation spinorielle). *Mais non !* Archétype d'une éq relativiste : éq de mvt d'une particule de 4-vitesse U^{μ} ds le chp é.m. F^{μ}_{ν} :

$$m\frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}s} = qF^{\mu}_{\nu}U^{\nu}, \qquad \text{ou} \quad m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = qFU. \tag{16}$$

La matrice $F \equiv (F^{\mu}_{\nu})$ n'est *pas* invariante : $F' = LFL^{-1} \neq F$.

La fonction d'onde de Dirac comme un 4-vecteur

La possibilité la plus simple pour S est l'identité : $\mathsf{S}(L) = L$, i.e. *on définit la fonction d'onde de Dirac comme un 4-vecteur :*

$$\psi'(X') = L.\psi(X), \qquad \text{ou} \quad \psi'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu}\psi^{\nu}. \tag{17}$$

Les matrices de Dirac se transforment alors ainsi :

$$\gamma'^{\mu} \equiv L^{\mu}_{\nu} L \gamma^{\nu} L^{-1}; \tag{18}$$

ceci signifie que *les composantes* $(\gamma^{\mu})^{\rho}_{\nu}$ *forment un tenseur* $\binom{2}{1}$.

- L'anticommutation est inchangée, $[\gamma'^{\mu}, \gamma'^{\nu}]_+ = 2g'^{\mu\nu}\, 1$.
- Conséquences physiques directes de l'éq de Dirac ("plate") inchangées : l'*équation*, donc ses *solutions*, sont inchangées. (Le choix du quadruplet (γ^{μ}) n'a pas d'effet : M.A. & F. Reifler, *Braz. J. Phys.* **38**, 248–258, 2008.)

Conclusions

$\star$ La correspondance classique-quantique dérive de l'hypothèse physique de la mécanique ondulatoire *et* d'une correspondance générale entre une équation d'onde et son équation de dispersion. Elle a lieu ds une classe de cartes privilégiée, définie par la donnée d'une connexion sans torsion.

$\star$ En appliquant cette correspondance après factorisation de l'équation de dispersion d'une particule relativiste, on obtient deux nouvelles équations de Dirac ds un E-T courbe.

$\star$ La première équation : "$D_\mu =$ Levi-Civita". Cette équation *obéit au principe d'équivalence* stricto sensu, contrairement à l'extension usuelle de l'équation de Dirac à un E-T courbe (éq de Dirac-Fock-Weyl).

⋆ La deuxième équation admet un référentiel privilégié.

⋆ Ces deux équations alternatives supposent que la fonction d'onde de Dirac est un *4-vecteur* et non un spineur. Dans le cas "plat" (E-T de Minkowski-Poincaré en coordonnées cartésiennes), ceci ne change *rien* à la mécanique quantique, car **i**) la forme explicite (dans une carte donnée) de l'équation est inchangée et **ii**) le choix du quadruplet de matrices de Dirac n'a aucune influence.

⋆ En revanche, dans le cas d'un E-T courbe (déjà ds E-T plat en référentiel non-inertiel), les deux nouvelles équations sont a priori non-équivalentes entre elles, et avec l'équation usuelle (Dirac-Fock-Weyl). Il faut étudier la MQ de ces trois équations.