Recherches 2015–2019 : Electrodynamique dans la théorie scalaire de la gravitation avec un “éther” & autres sujets

Mayeul Arminjon

Laboratoire “Sols, Solides, Structures, Risques”,

UMR 5521 CNRS/ Université Grenoble Alpes/ Grenoble-INP,

BP 53, F-38041 Grenoble cedex 9, France.

Table des matières

1 La définition de l'énergie pour un milieu continu ou un champ

Les recherches que j'ai menées sur la mécanique quantique dans un champ de gravitation relativiste, décrites dans les rapports précédents, se sont terminées par une étude de la notion d'opérateur énergie et de son lien avec la notion d'énergie en mécanique hamiltonienne [a1]. Cette étude avait pour but de mettre en évidence la signification physique du problème de non-unicité de l'opérateur énergie pour l'équation de Dirac généralement-covariante. Les échanges d'arguments sur ce sujet avec Frank Reifler et avec des referees m'ont convaincu que le point de vue classique sur la définition et la signification de l'énergie mérite d'être développé pour montrer sa pertinence aussi en physique relativiste. Après avoir discuté dans [a1] la notion d'énergie d'une particule d'épreuve ponctuelle, il m'a donc semblé intéressant d'étudier assez en détail le concept d'énergie pour un milieu continu ou un champ, en physique newtonienne ou relativiste, y compris dans un espace-temps courbe. Les points que j'ai abordés sont les suivants [a3] :

1) *Émergence du concept d'énergie en physique classique des milieux continus.* Pour illustrer cette émergence, j'ai étudié le cas d'un milieu élastique ou d'un fluide barotrope en gravitation newtonienne. La deuxième loi de Newton pour le milieu continu permet de calculer la puissance dépensée, en prenant le produit scalaire avec le champ de vitesse. En utilisant l'isentropie, on peut réécrire la puissance comme un taux temporel par unité de masse, qui s'égale à un terme de source. Ce dernier se transforme en faisant apparaître un terme de flux grâce à l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel newtonien. On obtient ainsi une équation de conservation locale pour l'énergie, ayant la forme standard en physique classique :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} = 0. \tag{1}$$

2) *Équation de conservation locale du tenseur énergie en relativité restreinte et sa dépendance par rapport au référentiel.* Cette équation bien connue : $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, se met classiquement sous la forme de deux équations du type (1) : une équation scalaire pour la densité d'énergie $w := c^2 T^{00}$, et une équation "3-vectorielle" pour la densité de quantité de mouvement $\boldsymbol{P} := cT^{i0}\partial_i$ (somme sur $i = 1, 2, 3$). Je note que ces deux équations de conservation locales (pour w et pour $\boldsymbol{P}$) sont covariantes par changement de coordonnées purement spatial mais pas par un changement général. Cela signifie qu'il y a une définition de l'énergie et de la quantité de mouvement (et de leurs flux) par référentiel — un référentiel étant défini formellement comme une classe d'équivalence F de systèmes de coordonnées s'échangeant par changement purement spatial [A44]. Les objets "spatiaux" tels que le "scalaire" w et les 3-vecteurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{\Phi}$ sont des champs de tenseurs sur la "variété espace" M_F que l'on peut définir [A44] à partir de la donnée d'un référentiel F.

3) *Définition rigoureuse d'un lagrangien et du principe d'action stationnaire dans un cadre simple.* Dans la littérature mathématique, ces définitions reposent sur la théorie des fibrés et de leurs fibrés "jets", qui est assez abstraite. En utilisant la notion d'expression locale d'un objet dans une carte (l'objet pouvant être un champ de tenseurs sur la variété espace-temps V ou plus généralement une section d'un fibré vectoriel de base V), on peut se contenter d'un cadre assez élémentaire tout en restant rigoureux (notamment par l'attention portée aux domaines de définition des cartes).

4) *Le "tenseur énergie canonique" n'est pas nécessairement un tenseur.* Il est facile de prouver que, comme l'a indiqué Leclerc (IJMPD **15**, 959, 2006), le tenseur énergie-impulsion-contraintes canonique associé au lagrangien du champ électromagnétique n'est *pas* un tenseur, car il ne se transforme pas tensoriellement lors d'un changement général de coordonnées. A ma connaissance, ceci n'a pas été noté ailleurs.

5) *Définition variationnelle du tenseur énergie.* La variation de l'intégrale d'action suite à un changement infinitésimal du système de coordonnées (ou suite à un difféomorphisme infinitésimal) s'exprime comme une intégrale contenant le "tenseur de Hilbert". Le raisonnement classique (par ex. Landau et Lifshitz) pour obtenir cette expression comporte des lacunes. Je démontre un théorème précis, en n'utilisant que des mathématiques relativement élémentaires. Puis je rappelle que la "loi de conservation covariante" : $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, vérifiée par le tenseur de Hilbert, n'est pas une loi de conservation locale au sens classique (1) ; et que cela signifie qu'il n'y a pas de concept exact d'énergie locale dans les théories basées sur cette équation, comme la relativité générale. Je prouve un résultat précis sur l'unicité et le caractère effectivement tensoriel du tenseur de Hilbert, en utilisant des mathématiques encore assez simples. Cette preuve nécessite de considérer la variation de l'action lors d'une variation générale de la métrique, et non pas lors d'une variation de la métrique résultant d'un difféomorphisme infinitésimal.

6) *Un résultat d'unicité pour le bilan d'énergie.* La densité d'énergie et son flux sont-ils déterminés de façon unique ? Je montre que c'est le cas si l'on exige qu'ils dépendent des champs de manière polynomiale.

2 Espace et espace-temps en mécanique classique, en relativité restreinte, et en gravitation relativiste

Dans des travaux des périodes précédentes [A44], [a2], j'ai étudié comment on peut définir l'espace en partant de l'espace-temps. Je me suis soucié principalement du cas d'un espace-temps assez général, tel qu'il apparaît dans les théories relativistes de la gravitation. Les concepts de la variété différentielle espace "locale" associée à un référentiel local [A44], et de la variété différentielle espace "globale" associée à un fluide de référence global [a2], ne nécessitent pas une métrique. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où le concept de variété est plus général que celui de métrique riemannienne ou lorentzienne. Néanmoins, dans la littérature sur la gravitation il n'arrive guère qu'on considère une variété pertinente à l'espace-temps sans qu'elle soit munie d'une métrique. Une raison pour cela est qu'en RG la variété espace-temps V n'est pas fixée indépendamment de la métrique : "les points de l'espace-temps (évènements) ne sont pas individualisés en dehors de leurs propriétés métriques" (Stachel, in Einstein and the History of General Relativity, Birkhaüser, 1989, pp. 63-100). D'autre part, mes recherches sur la théorie alternative scalaire montrent que le fait de considérer comme espace-temps physique une variété lorentzienne $(\mathrm{V}, \boldsymbol{\gamma})$ n'impose pas d'adopter la dynamique de la RG, dans laquelle les particules d'épreuve suivent les géodésiques de $\boldsymbol{\gamma}$. Autrement dit, la structure géométrique de l'espace-temps ne définit pas la physique gravitationnelle de manière unique. Il était alors naturel de se demander [a5] si ces deux points (le fait que la définition de l'espace soit indépendante d'une métrique et le fait que la structure géométrique de l'espace-temps ne définisse pas la physique) sont déjà vrais dans les théories plus simples que sont la mécanique classique et la relativité restreinte.

2.1 Mécanique classique

Pour étudier ces questions en mécanique classique [a5], je suis parti d'un espace-temps de la forme

$$\mathrm{V}_{\mathrm{N-L}} = \mathrm{A}^1 \times \mathrm{A}^3, \tag{2}$$

où A^1 est un espace affine de dimension 1, et où A^3 est un espace affine tridimensionnel. On peut dire que A^1 formalise l'axe du "temps absolu" postulé par Newton et que A^3 est l'"espace absolu" qu'il postulait également. Des espaces affines sont parfois considérés en mécanique classique (mais, à ma connaissance, pas de la même façon) : notamment, Arnold a défini l'espace-temps galiléen comme un espace affine quadridimensionnel, et Porta Mana a considéré chaque espace instantané de la mécanique classique comme un espace affine tridimensionnel muni d'une distance. J'ai voulu voir jusqu'où l'on pouvait aller sans introduire aucune métrique ni même aucune distance.

La notion classique de trajectoire se définit bien sûr comme une application g définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$: $t \mapsto x = g(t) \in \mathrm{A}^3$. On peut aussi considérer une ligne d'univers $l \subset \mathrm{A}^1 \times \mathrm{A}^3$, qui est par définition l'image d'une courbe de l'espace-temps : $l = C(\mathrm{I})$ où I est à nouveau un intervalle de $\mathbb{R}$ et $C : \xi \mapsto C(\xi) = (\hat{T}(\xi), \hat{x}(\xi)) \in \mathrm{A}^1 \times \mathrm{A}^3$ est la courbe paramétrée. Je montre qu'une ligne d'univers l détermine une trajectoire unique, indépendamment du paramétrage de l. Un point mobile dans l'espace A^3 peut se définir comme une trajectoire ou alternativement comme une ligne d'univers. Sur le produit (2), les cartes qui sont le produit d'une carte affine θ de A^1 et d'une carte affine ϕ de A^3 sont privilégiées :

$$\Phi(T, x) := (\theta(T), \phi(x)), \ T \in \mathrm{A}^1, \ x \in \mathrm{A}^3. \tag{3}$$

Dans une telle carte, la vitesse et l'accélération d'un point mobile sont définies simplement comme $\mathbf{u}(t) := \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ et $\mathbf{a}(t) := \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$, où $\mathbf{x}(t) := \phi(x(t))$. Je montre que ceci définit les mêmes vecteurs $u(t)$ et $a(t)$ de l'espace des translations E^3 de A^3, indépendamment de la carte affine ϕ de A^3, et constitue ainsi une définition correcte. (Un changement de la carte θ de A^1 signifie simplement un changement de l'origine du temps t et de son unité.) La notion de métrique n'intervient donc pas dans la définition de l'accélération.

L'espace M_v en mouvement uniforme à vitesse v par rapport à l'espace A^3 peut être défini comme l'ensemble des lignes d'univers $l_{x\,v}$ correspondant à une trajectoire à vitesse constante $v \in \mathrm{E}^3$ (la ligne $l_{x\,v}$ passant par le point $x \in \mathrm{A}^3$). En particulier, l'espace A^3 peut aussi être vu comme l'ensemble M_0 des lignes d'univers $l_x = l_{x\,0}$ correspondant à une trajectoire immobile au point $x \in \mathrm{A}^3$. En effet M_0 est canoniquement un espace affine et l'application $x \mapsto l_x$ est un isomorphisme d'espaces affines. Une carte "produit" étant définie en (3), la carte Φ_v qui associe au point (T, x') de $\mathrm{A}^1 \times \mathrm{A}^3$ le vecteur de $\mathbb{R}^4$

$$\Phi_v(T, x') := \Phi(T, x' - tv) = (t, \phi(x' - tv)) \qquad (t := \theta(T)) \tag{4}$$

est telle que le vecteur des coordonnées spatiales : $\mathbf{x}' := \phi(x' - tv) \in \mathbb{R}^3$, reste constant sur chaque ligne $l_{x\,v}$. Ainsi la carte Φ_v est pertinente à l'espace mobile M_v et il est naturel de définir la vitesse et l'accélération par rapport à M_v d'un point mobile à partir des formules $\mathbf{u}'(t) := \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t}$ et $\mathbf{a}'(t) := \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t}$. Ceci définit là aussi des vecteurs $u'(t)$ et $a'(t)$ indépendants de la carte affine ϕ de A^3. On obtient la formule classique de composition des vitesses : $u' = u - v$, et aussi l'invariance de l'accélération par passage à un espace (ou référentiel) en mouvement uniforme, $a' = a$ — cette invariance étant le cœur de la relativité galiléenne. Enfin, comme M_0, l'espace mobile M_v est canoniquement un espace affine de dimension 3, soit A'^3. On peut faire la construction précédente de la cinématique classique du point en remplaçant A^3 par A'^3, conformément au fait que pour cette cinématique il n'y a pas d'espace "absolu". En résumé, la définition de l'espace comme un ensemble de lignes d'univers est appropriée également en mécanique classique, et là aussi elle ne fait pas intervenir de métrique.

En ce qui concerne l'influence de la structure géométrique sur la physique dans le contexte des concepts classiques d'espace et de temps, incarné par l'espace-temps (2) : je note que cet espace-temps qui, comme on vient de le voir, fournit un cadre adéquat pour la relativité galiléenne, fournit également un cadre adéquat pour la première théorie électromagnétique de Lorentz. Celle-ci prédisait des effets du mouvement par rapport à l'"éther" (modélisé ici comme l'espace "immobile" A^3 ou M_0). Dans chaque cas, l'espace des translations de A^3, c'est à dire l'espace vectoriel E^3, est muni d'une métrique euclidienne (c'est nécessaire déjà pour la dynamique du point, puisque l'énergie cinétique, par exemple, la fait intervenir). Ainsi la donnée de l'espace-temps de la mécanique classique avec sa métrique euclidienne d'espace ne détermine pas le caractère relativiste ou non-relativiste de la physique qui s'y déroule.

2.2 Relativité restreinte

L'espace-temps de Minkowski est le cadre de la relativité restreinte. Cet espace-temps est habituellement défini comme un espace vectoriel de dimension 4, E^4, équipé de la métrique $\boldsymbol{\gamma}^0$ du même nom. Il est plus conforme à l'absence d'un "évènement origine" de le définir comme un espace *affine* de dimension 4, A^4 (le même que pour l'espace-temps galiléen considéré par Arnold), équipé de la métrique $\boldsymbol{\gamma}^0$. Je note que pour définir celle-ci, on peut partir d'une carte affine *quelconque* χ de A^4 et poser qu'en chaque point X de A^4 la matrice des composantes de $\boldsymbol{\gamma}^0$ en X dans la carte χ est la matrice classique $\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Il y a donc une infinité de "métriques de Minkowski" différentes sur le même espace-temps A^4, parce qu'on passe d'une carte affine à une autre par une transformation linéaire inversible quelconque, qui généralement n'est donc pas une transformation de Lorentz conservant la matrice de la métrique. Cette multiplicité est vraie également si l'on préfère définir l'espace-temps de Minkowski à partir d'un espace vectoriel E^4. Elle ne signifie pas une ambiguïté physique.

Exactement comme pour la mécanique classique, on peut fort bien définir l'espace-temps de Minkowski en partant de l'espace-temps affine "décomposé" $\mathrm{A}^1 \times \mathrm{A}^3$, au lieu de l'espace-temps affine "bloc" A^4 : on se donne des métriques euclidiennes $\boldsymbol{h}^1$ et $\boldsymbol{h}^3$ sur les espaces de translations respectifs E^1 et E^3, et l'on pose pour deux vecteurs quelconques $U = (\tau, v)$, $U' = (\tau', v')$ de l'espace de translations $\mathrm{E} = \mathrm{E}^1 \times \mathrm{E}^3$:

$$\boldsymbol{\gamma}^0(U, U') = \boldsymbol{\gamma}^0((\tau, v), (\tau', v')) := \boldsymbol{h}^1(\tau, \tau') - \boldsymbol{h}^3(v, v'). \qquad (5)$$

Ceci donne une façon de formaliser la version "Lorentz-Poincaré" de la relativité restreinte, qui fait découler celle-ci du postulat de l'éther vu comme un référentiel inertiel dans lequel les équations de Maxwell sont valides et tel que les objets en mouvement par rapport à lui sont "Lorentz-contractés".

En conclusion, l'espace-temps affine "décomposé" $\mathrm{A}^1 \times \mathrm{A}^3$ est une structure mathématique plus riche (plus particulière) que l'espace-temps affine "bloc" A^4, dans la mesure où le premier espace-temps mais pas le deuxième contient des projections temporelle et spatiale privilégiées. Pourtant la première structure est physiquement plus générale parce que des physiques relativistes aussi bien que non-relativistes peuvent y être formulées. Ceci montre clairement que la structure géométrique de l'espace-temps n'est pas en relation univoque avec la physique. Bien entendu la définition de l'espace associé à un référentiel, qui fonctionne en gravitation relativiste, fonctionne aussi en relativité restreinte.

2.3 Gravitation relativiste

Les résultats à ce sujet présentés dans le travail [a5] sont essentiellement et ouvertement un résumé de résultats antérieurs [A15], [A16], [A44], [a2]. Parmi ceux-ci, les résultats relatifs à la définition locale [A44] ou globale [a2] de l'espace associé à un référentiel, qui donc sont résumés dans [a5], ont déjà été décrits dans mon rapport précédent. Les autres remarques faites au sujet de la gravitation relativiste dans le travail [a5] concernent le fait que sur une variété lorentzienne $(\mathrm{V}, \boldsymbol{\gamma})$ on peut définir une autre dynamique que celle d'Einstein. A savoir, celle basée sur l'extension (6) de la deuxième loi de Newton [A15], [A16]. Dans le travail [a5], j'insiste sur les points suivants : (i) Cette extension peut être définie dans n'importe quel fluide de référence admissible au sens de Cattaneo (donc pas forcément un référentiel "synchronisé" comme je le considère ci-dessous au début du §3.1). (ii) La forme du champ d'accélération $\mathbf{g}$ intervenant dans (6) peut être déterminée de façon à ce que les particules libres ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) suivent les géodésiques, auquel cas l'on retrouve la dynamique einsteinienne. (iii) Néanmoins, l'interprétation de la gravité comme une force de pression [A8], [A9] conduit à postuler une forme plus simple pour le vecteur spatial $\mathbf{g}$, et cette même forme peut être démontrée indépendamment de cette interprétation, à partir d'hypothèses phénoménologiques [A16]. La possibilité de définir cette dynamique différente sur une variété lorentzienne (admettant un référentiel synchronisé global, i.e. $\gamma_{0i} = 0$ dans une carte globale) montre bien que la structure géométrique de l'espace-temps ne définit pas la physique gravitationnelle de façon unique.

3 L'électrodynamique dans la théorie scalaire de la gravitation avec un "éther"

Entre 2005 et 2014, j'ai travaillé sur la mécanique quantique dans un champ de gravitation et sur la définition de l'espace associé à un référentiel. J'ai mentionné à la fin de mon rapport précédent les raisons qu'ont donné ces travaux pour reprendre les recherches sur la théorie scalaire en question. J'ai signalé au même endroit que la théorie du champ électromagnétique dans le champ de gravitation, dont les équations principales ont été publiées (dans le cadre d'une première version de la théorie scalaire) [B13], n'était pas assez développée dans cette théorie alternative. C'est la première tâche à laquelle je me suis attelé (dans le cadre d'une deuxième version de la théorie scalaire) [a4]. Le point de départ est l'obtention de l'équation de la dynamique d'un milieu continu en présence d'un champ de force non-gravitationnelle extérieure dans la théorie étudiée. L'application de cette équation au milieu chargé soumis à la force de Lorentz fournit, sous deux hypothèses, des "équations de Maxwell modifiées" (i.e., modifiées par la présence du champ de gravitation) [a4] — mais mes recherches ultérieures [a6] m'ont conduit à abandonner l'une de ces deux hypothèses, voir §§3.4 et 3.5.

3.1 Dynamique du continu

La théorie étudiée se distingue de la relativité générale (RG) et de ses diverses extensions notamment par sa dynamique, qui consiste en une généralisation à un espace-temps courbe de la deuxième loi de Newton valable en relativité restreinte. Cette dynamique se définit sur un fluide de référence privilégié $\mathcal{E}$ dans la variété espace-temps V, en utilisant de façon essentielle la variété espace M que j'associe [a2] à ce fluide de référence (M est une variété différentielle de dimension 3). [1] La dynamique est définie d'abord pour une particule d'épreuve. L'extension proposée de la 2ème loi de Newton s'écrit :

$$\mathbf{F} + (E/c^2)\mathbf{g} = D\mathbf{P}/Dt_{\mathbf{x}}, \tag{6}$$

où $\mathbf{F}$ est la force non-gravitationnelle, E est l'énergie de la particule d'épreuve, $\mathbf{g}$ l'accélération de la gravité selon cette théorie, $\mathbf{P} := (E/c^2)\mathbf{v}$ est la quantité de mouvement, et $t_{\mathbf{x}}$ est le temps local tel que

$$\frac{\mathrm{d}t_{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \beta := \sqrt{\gamma_{00}}. \tag{7}$$

(Les coordonnées x^μ sont adaptées au fluide de référence privilégié $\mathcal{E}$ et telles que, de plus, la métrique d'espace-temps $\boldsymbol{\gamma}$ vérifie la condition de synchronisation $\gamma_{0i} = 0$, ce qui est possible par hypothèse pour le fluide de référence $\mathcal{E}$. Et l'on pose $t := x^0/c$.) La 3-vitesse $\mathbf{v}$ de la particule test (relativement au fluide de référence $\mathcal{E}$) est définie avec le temps local $t_{\mathbf{x}}$, i.e., $v^i := \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t_{\mathbf{x}}} = \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$. Enfin $D/Dt_{\mathbf{x}} := (1/\beta)D/Dt$, la dérivée D/Dt étant définie de façon unique par l'exigence que la règle de Leibniz s'applique pour la dérivation d'un produit scalaire [A16].

La 2ème loi (6) entraîne une *équation de l'énergie* donnant l'évolution de E pour une telle particule [A15]. J'ai étendu cette équation au cas où une force non-gravitationnelle $\mathbf{F}$ s'exerce sur la particule [a4]. En utilisant cette équation, on trouve l'expression de la 4-accélération de la particule. Si l'on considère ensuite une *poussière,* i.e. un milieu continu constitué d'une myriade de particules

[1] Un fluide de référence *général* $\mathcal{F}$ peut être défini par la donnée d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{U}_{\mathcal{F}}$ sur l'espace-temps V, le champ $\boldsymbol{U}_{\mathcal{F}}$ devant être du genre temps pour un fluide de référence "admissible" (Cattaneo, Nuov. Cim. **10**, 318, 1958). La *variété espace* $\mathrm{N}_{\mathcal{F}}$ *associée* à un fluide de référence $\mathcal{F}$ est l'ensemble des courbes intégrales maximales du champ $\boldsymbol{U}_{\mathcal{F}}$, cet ensemble étant muni d'une structure canonique de variété différentielle 3D [a2]. Ces courbes correspondent physiquement aux trajectoires des "observateurs" privilégiés. Pour définir spécifiquement la variété espace M associée au fluide de référence privilégié $\mathcal{E}$ dont je postule l'existence, on peut partir plus simplement (mais restrictivement) d'un espace-temps de la forme $\mathrm{V} = \mathbb{R} \times \mathrm{M}$ [A15]. Cette hypothèse restrictive devient presqu'inévitable au stade de l'équation du champ scalaire, car celle-ci utilise de façon indispensable la coordonnée de temps privilégiée T de la théorie, telle que cT soit la projection d'un évènement quelconque $X \in \mathbb{R} \times \mathrm{M}$ sur la composante $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$ [A35]. Il est important de définir la dynamique dans le cadre plus général d'un fluide de référence quelconque et de sa variété espace associée, notamment parce que cela permet de voir que la dynamique de la RG peut aussi se formuler à partir de l'extension (6) de la deuxième loi de Newton — mais avec un champ d'accélération $\mathbf{g}$ différent [A16].

non-interagissantes, chacune de ces particules doit obéir à la deuxième loi de Newton de la théorie et donc à l'expression trouvée pour la 4-accélération A^μ. Or, l'expression de la 4-accélération d'une particule d'épreuve détermine l'équation de la dynamique pour une poussière, car une poussière vérifie l'équation

$$T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = \rho^* \, c^2 \, U^\mu_{\ ;\nu} \, U^\nu = \rho^* \, c^2 \, A^\mu, \tag{8}$$

où ρ^* est la densité propre de masse-au-repos et U^μ sont les composantes de la 4-vitesse. L'équation (8) permet d'obtenir l'équation dynamique standard $T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0$ en partant de l'hypothèse du mouvement géodésique ($A^\mu = 0$), ou inversement. Dans la théorie étudiée, la forme spécifique simple du champ d'accélération de la gravité intervenant dans la 2ème loi de Newton (6) conduit avec (8) à une équation dynamique différente, qui avait déjà été obtenue dans le cas sans force extérieure [A20]. Dans le cas où la poussière est soumise à un champ de forces extérieur non gravitationnel ayant pour densité volumique $\mathbf{f}$, on obtient [a4] l'équation suivante :

$$T^{0\nu}_{\ \ ;\nu} = b^0(\mathbf{T}) + \frac{\mathbf{f}.\mathbf{v}}{c\beta}, \qquad T^{i\nu}_{\ \ ;\nu} = b^i(\mathbf{T}) + f^i. \tag{9}$$

Ici f^i ($i = 1, 2, 3$) sont les composantes de $\mathbf{f}$, et $\mathbf{v}$ est le champ de vitesses du milieu continu par rapport au fluide $\mathcal{E}$, défini avec le temps local (7) comme pour une particule test. De plus,

$$b^0(\boldsymbol{T}) := \frac{1}{2} \gamma^{00} \, g_{ij,0} \, T^{ij}, \quad b^i(\boldsymbol{T}) := \frac{1}{2} \, g^{ij} g_{jk,0} \, T^{0k}, \tag{10}$$

où $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_\mathcal{E}$ est la métrique spatiale associée à la métrique d'espace-temps $\boldsymbol{\gamma}$ et au fluide de référence privilégié $\mathcal{E}$. Noter que b^μ dépend linéairement de $\mathbf{T}$.

Je postule que l'équation (9) avec la définition (10) reste valable dans le cas d'un milieu continu général caractérisé par l'expression de son tenseur énergie $\mathbf{T}$ en fonction de certains “champs matière”, à condition bien sûr que le champ de vitesses $\mathbf{v}$ de ce milieu continu et le champ de forces extérieures non gravitationnelles $\mathbf{f}$ exercé sur lui soient définis sans ambiguïté. Cette hypothèse exprime l'universalité de la gravitation et l'équivalence masse-énergie dans le cadre de la théorie étudiée.

3.2 Une version des équations de Maxwell modifiées

Le champ électromagnétique (é.-m.) est représenté, de façon classique, par le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{F}$ vérifiant le premier groupe standard des équations de Maxwell :

$$M_{\lambda\mu\nu} := F_{\lambda\mu\,,\nu} + F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} = F_{\lambda\mu\,;\nu} + F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0, \tag{11}$$

parce que ce groupe n'est pas affecté par le fait que la métrique d'espace-temps $\boldsymbol{\gamma}$ soit courbe. En demandant que l'expression de la force de Lorentz soit un vecteur d'espace invariant par les changements de coordonnées internes au fluide de référence synchronisé $\mathcal{E}$ et coïncide avec l'expression classique lorsque la métrique $\boldsymbol{\gamma}$ se réduit à la métrique de Minkowski, on obtient l'expression [2]

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\right), \qquad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^i := e^i{}_{jk}\, a^j\, b^k, \tag{12}$$

où les champs électrique et magnétique sont les champs de vecteurs spatiaux ayant pour composantes

$$E^i := \frac{c\, F^i{}_0}{\beta}, \quad B^k := -\frac{1}{2} e^{ijk} F_{ij}. \tag{13}$$

(e_{ijk} est le tenseur antisymétrique usuel coïncidant avec la signature ε_{ijk} dans le cas plat, et ses indices sont remontés ou descendus avec la métrique spatiale $\boldsymbol{g}$.) Dans le cas d'un milieu continu chargé, l'expression (12) devient

$$f^i := \frac{\delta F^i}{\delta V} = F^i{}_\mu\, J^\mu. \tag{14}$$

où $\rho_{\text{el}} := \delta q/\delta V$ est la densité de charge, et où $J^{\,\mu} := \rho_{\text{el}}\, \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t_{\mathbf{x}}$ est le 4-courant. En utilisant (14), on particularise l'éq. (9) pour le milieu continu chargé soumis à la force de Lorentz :

$$T^{\mu\nu}_{\text{chg}\ \ ;\nu} = b^\mu(\boldsymbol{T}_{\text{chg}}) + F^\mu{}_\nu\, J^\nu. \tag{15}$$

où $\boldsymbol{T}_{\text{chg}} := \boldsymbol{T}_{\text{milieu chargé}}$ est le tenseur énergie du milieu chargé déformable .

La modification du deuxième groupe des équations de Maxwell due à la présence d'un champ de gravitation a été déduite [a4] de l'équation dynamique (15) appliquée au milieu continu chargé produisant le champ é.-m. $\boldsymbol{F}$ et soumis au champ de forces de Lorentz $\mathbf{f}$ défini par (14), sous deux hypothèses :

(i) Le tenseur énergie total est la somme $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\text{chg}} + \boldsymbol{T}_{\text{champ}}$. [3]

(ii) Le tenseur énergie total $\boldsymbol{T}$ obéit à l'équation générale pour la dynamique d'un milieu continu sans force non-gravitationnelle, éq. (9) avec $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

On voit facilement que, *sous ces deux hypothèses,* l'éq. (15) du milieu chargé équivaut à une équation du même type que (15), mais appliquée au champ :

$$T^{\mu\nu}_{\text{champ}\ \ ;\nu} = b^\mu(\mathbf{T}_{\text{champ}}) - F^\mu{}_\nu\, J^\nu. \tag{17}$$

[2] Dans ce rapport, j'écris les formules dans le système international (SI), car c'est nécessaire [a6] pour la recherche décrite au §3.4. Dans [a4], j'utilisais le système de Gauss, plus concis.

[3] Ici $\boldsymbol{T}_{\text{champ}}$ est le tenseur énergie du champ électromagnétique, dont l'expression en fonction du tenseur $\boldsymbol{F}$ est classique :

$$T^{\mu\nu}_{\text{champ}} := \left(-F^\mu{}_\lambda F^{\,\nu\lambda} + \frac{1}{4}\gamma^{\,\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho}\right)/\mu_0. \tag{16}$$

En utilisant l'expression (16) de $\boldsymbol{T}_{\text{champ}}$, on arrive à réécrire (17) comme :

$$F^{\mu}{}_{\lambda}\, F^{\lambda\nu}{}_{;\nu} = \mu_0 \left[b^{\mu}\left(\boldsymbol{T}_{\text{champ}}\right) - F^{\mu}{}_{\lambda}\, J^{\lambda} \right], \tag{18}$$

ce qui constitue le deuxième groupe. En effet, dans le cas où la matrice $(F^{\mu}{}_{\nu})$ est inversible, ceci devient

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \mu_0 \left(G^{\mu}{}_{\nu}\, b^{\nu}(\boldsymbol{T}_{\text{champ}}) - J^{\mu} \right), \quad (G^{\mu}{}_{\nu}) := (F^{\mu}{}_{\nu})^{-1}. \tag{19}$$

Cette dernière équation se réduit au deuxième groupe postulé en RG lorsque le champ de gravitation est constant dans le référentiel privilégié, car on a alors $g_{ij,0} = 0$, d'où $b^{\nu} = 0$ par (10).

3.3 Deuxième loi de Newton pour une "poussière de photons" et optique géométrique

Pour obtenir la dynamique d'un milieu continu soumis à un champ de forces non-gravitationnel de densité volumique $\mathbf{f}$, un premier procédé est de partir de la 2ème loi de Newton (6) pour une particule test et d'utiliser la 4-accélération qui s'en déduit, comme je l'ai résumé au §3.1. Mais on peut aussi écrire directement la 2ème loi de Newton pour un élément de volume δV du milieu continu :

$$\delta\mathbf{F} + \frac{\delta E}{c^2}\mathbf{g} = \frac{D}{Dt_{\mathbf{x}}}\left(\frac{\delta E}{c^2}\mathbf{v}\right), \tag{20}$$

avec

$$\delta\mathbf{F} := \mathbf{f}\delta V, \quad \delta E := T^0{}_0\, \delta V, \quad \mathbf{v} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t_{\mathbf{x}}} := \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}. \tag{21}$$

(On vérifie en effet, au moins pour une "poussière ordinaire", que l'énergie pertinente s'écrit bien $\delta E := T^0{}_0\, \delta V$ [a4], $\boldsymbol{T}$ étant bien sûr le tenseur énergie du milieu continu considéré, donné par l'équation classique $T^{\mu\nu} = \rho^*\, c^2\, U^{\mu}\, U^{\nu}$ pour une poussière ordinaire.) Je prouve [a4] que, lorsque le milieu est une "poussière générale", i.e. lorsque le tenseur $\boldsymbol{T}$ a la forme

$$T^{\mu\nu} = V^{\mu}V^{\nu}, \tag{22}$$

l'équation (20) est équivalente à la partie spatiale $(9)_2$ de l'équation dynamique obtenue par le premier procédé, la vitesse du milieu continu étant définie par

$$v^i := u^i/\beta, \quad u^i := c\, T^{0i}/T^{00}. \tag{23}$$

De même, la composante temporelle $(9)_1$ est équivalente, sous l'hypothèse (22), à l'équation de l'énergie obtenue en transposant au milieu continu l'équation valable pour une particule test — comme on transpose (6) en (20). Ainsi, ces deux équivalences sont vraies lorsque $\boldsymbol{T}$ a la forme (22), indépendamment de la nature physique du milieu ou champ ayant $\boldsymbol{T}$ pour tenseur énergie. Elles sont donc vraies pour un champ électromagnétique $\boldsymbol{F}$ lorsque $\boldsymbol{T}_{\text{champ}}$ a la forme (22), ce qui signifie exactement que $\boldsymbol{F}$ est un champ "null", ayant ses deux invariants nuls.

Considérons en particulier le cas d'un champ é.-m. "null" (i.e. les deux invariants du champ sont nuls) et dans le vide, i.e. $J^\mu = 0$. Dans ce cas, l'éq. (17) s'identifie à l'équation dynamique pour le champ en l'absence de force extérieure :

$$T^{\mu\nu}_{\text{champ}\ ;\nu} = b^\mu(\mathbf{T}_{\text{champ}}), \tag{24}$$

et donc, d'après ce qui précède, équivaut à la conjonction de (i) la 2ème loi de Newton (20) appliquée au milieu continu "champ null" en l'absence de force non-gravitationnelle et (ii) l'équation de l'énergie correspondante. Or l'éq. (17) équivaut, comme on l'a dit, au 2ème groupe de Maxwell modifié (18). Ainsi, pour un champ é.-m. "null" dans le vide, ce 2ème groupe se réduit à la 2ème loi de Newton (20) appliquée au "champ null" avec $\delta\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (et à l'équation de l'énergie correspondante), c'est à dire qu'il décrit la même dynamique que celle définie par la 2ème loi de Newton (6) pour un photon individuel avec $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Or cette dynamique des photons individuels sans force non-gravitationnelle constitue l'optique géométrique de la théorie étudiée (qui inclut tous les effets classiques de la gravitation sur les rayons lumineux [A19]). En résumé, dans la théorie étudiée un champ é.-m. "null" se comporte comme une "poussière de photons". Ceci fournit le lien entre les optiques ondulatoire et géométrique.

3.4 Le problème de la conservation de la charge

Dans le cas "générique" où la matrice $(F^\mu{}_\nu)$ du champ é.-m. est inversible, on déduit du deuxième groupe (19) que la charge électrique n'est pas conservée dans un champ de gravitation variable, le taux de production étant donné par [a4] :

$$\hat{\rho} := (J^\mu)_{;\mu} = (G^\mu{}_\nu\, b^\nu(\boldsymbol{T}_{\text{champ}}))_{;\mu}\,. \tag{25}$$

Il n'est pas aisé de donner des estimations numériques pertinentes, notamment parce que la plupart des solutions connues des équations de Maxwell correspondent à des champs électrique et magnétique orthogonaux — alors que la condition d'inversibilité de la matrice $(F^\mu{}_\nu)$ est précisément $\mathbf{E}.\mathbf{B} \neq 0$. Pour obtenir des estimations [a6], je considère un champ gravitationnel post-Newtonien ; donc le champ scalaire β (éq. (7)) et la métrique ont des développements de Taylor par rapport au paramètre de champ faible λ, qui dans des unités appropriées est $\lambda = c^{-2}$ [A23]. On peut développer également le champ é.-m. $\boldsymbol{F}$ et le 4-courant $\mathbf{J}$ par rapport à λ, mais sans supposer qu'ils soient faibles ou lentement variables :

$$\boldsymbol{F} = c^n\left(\overset{0}{\boldsymbol{F}} + O(c^{-2})\right), \quad \mathbf{J} = c^m\left(\overset{0}{\mathbf{J}} + O(c^{-2})\right), \tag{26}$$

avec des entiers n et m (positifs, négatifs, ou nuls). Les développements (26) s'apparentent à des développements post-Minkowskiens. En insérant ceci dans le deuxième groupe (18), on trouve qu'on doit avoir $m = n - 2$ et que la première approximation de (18) est simplement le deuxième groupe valable en relativité restreinte, faisant intervenir les champs de première approximation $\boldsymbol{F}_1 := c^n \overset{0}{\boldsymbol{F}}$, $\mathbf{J}_1 := c^m \overset{0}{\mathbf{J}}$. De plus, le taux de production (25) s'écrit indépendamment de n :

$$\hat{\rho} = c^{-3} \left[\left(G_1{}^{\mu 0}\, T_1{}^{jj} - G_1{}^{\mu i}\, T_1{}^{0i} \right) \partial_T U \right]_{,\mu} + O(c^{-5}), \qquad (27)$$

où $\boldsymbol{G}_1 := (\boldsymbol{F}_1)^{-1} = c^{-n} \overset{0}{\boldsymbol{G}}$, $\boldsymbol{T}_1$ est le tenseur énergie associé à $\boldsymbol{F}_1$ par l'éq. (16), et où U est le potentiel Newtonien. Cette expression peut être explicitée en fonction des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ [a6] et contient alors les dérivées temporelles $\partial_T U$ *et* $\partial_T \nabla U$, qui doivent être évaluées dans le référentiel privilégié ("éther") $\mathcal{E}$ considéré par la théorie. Pour les vitesses de translation par rapport à $\mathcal{E}$ auxquelles on peut s'attendre par des arguments astronomiques, soit $V \approx 10 - 10^3$ km/s, c'est justement cette translation du système considéré (le système solaire ou simplement la Terre) qui contribue principalement à $\partial_T U$ et $\partial_T \nabla U$, ce qui permet de les estimer facilement en fonction de V.

J'applique ces calculs à des ondes é.-m. planes et à des groupes de "dipôles de Hertz". (Bien qu'un dipôle de Hertz unique produise des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ orthogonaux, ce n'est plus le cas lorsqu'on somme les champs de dipôles de vecteurs différents et situés en différents points de l'espace.) Le groupe de dipôles est au repos dans un référentiel en mouvement uniforme de vitesse V par rapport à $\mathcal{E}$. Je trouve [a6] que, déjà pour $V = 10$ km/s, les taux de charge produite ou détruite atteignent des pics (très concentrés, surtout dans l'espace) dont les valeurs semblent largement exclues expérimentalement, même si elles ont des signes opposés en différents points. Ceci écarte le deuxième groupe obtenu dans [a4], i.e. l'éq. (18). Je montre ci-après d'où vient ce problème et comment on le résout.

3.5 Origine du problème et introduction de l'énergie d'interaction

Le deuxième groupe (18), qui vient d'être écarté, résulte comme on l'a dit de l'équation dynamique (9) appliquée au milieu chargé, *et* des hypothèses (i) et (ii), tout ceci entraînant (17). En fait, cela entraîne directement

$$T^{0\nu}_{\text{champ}\ \ ;\nu} = b^0(\boldsymbol{T}_{\text{champ}}) - \frac{\mathbf{f.v}}{c\beta}, \qquad T^{i\nu}_{\text{champ}\ \ ;\nu} = b^i(\boldsymbol{T}_{\text{champ}}) - f^i \qquad (28)$$

(ce qui équivaut à (17) compte-tenu de (14)). Cette équation a exactement la forme de l'équation dynamique (9) appliquée non pas au milieu chargé mais au champ é.-m. lui-même, avec un champ de forces non-gravitationnel $f^i_{\text{champ}} =$

$-f^i := -f^i_{\text{milieu chargé}}$, et pourvu que le champ de vitesses $\mathbf{v}_{\text{champ}}$ vérifie la condition $\mathbf{f}.(\mathbf{v}_{\text{champ}} - \mathbf{v}_{\text{milieu chargé}}) = 0$. La première égalité signifie l'opposition de l'action (densité de force de Lorentz $\mathbf{f}$ exercée par le champ sur le milieu chargé) et de la réaction exercée par le milieu chargé sur le champ é.-m.. Poincaré a montré que l'opposition action-réaction ne s'applique pas au milieu chargé seul, au sens que la conservation de la quantité de mouvement ne s'applique qu'en tenant compte également de la quantité de mouvement portée par le champ é.-m.. Ceci est cohérent avec l'égalité $f^i_{\text{champ}} = -f^i_{\text{milieu chargé}}$: en l'absence de gravitation, on a bien conservation de la quantité de mouvement totale (champ é.-m. plus milieu chargé). La deuxième égalité, $\mathbf{f}.(\mathbf{v}_{\text{champ}} - \mathbf{v}_{\text{milieu chargé}}) = 0$, est peu plausible a priori : dans le cas d'une "poussière de photons" examiné au §3.3, la vitesse $\mathbf{v}_{\text{champ}}$ est bien définie par (23), et on montre facilement que son module vaut c [a6] — tandis que la vitesse du milieu chargé est inférieure à c et même, en général, négligeable devant c. Pourtant, il se trouve que cette égalité des projections des vitesses sur la direction de la force de Lorentz a lieu justement dans ce cas d'une poussière de photons i.e. d'un champ é.-m. "null", mais elle n'a pas de raison d'être vraie dans le cas d'un champ é.-m. général, pour lequel on ne sait d'ailleurs pas comment définir le champ de vitesses $\mathbf{v}_{\text{champ}}$ [a6].

Ainsi l'application de l'équation dynamique (9) au milieu chargé, jointe aux hypothèses (i) et (ii), entraînent la conséquence peu plausible ci-dessus, en sus d'une production de charge dans des quantités qui semblent vraiment exclues. L'équation dynamique (9) ne peut guère être changée, car (au moins dans le cas où le tenseur énergie du milieu chargé est celui d'une poussière), elle se *déduit* de la 2ème loi de Newton (6) — qui constitue le cœur de la théorie étudiée. De même l'hypothèse (ii) doit être maintenue, parce qu'elle est indispensable pour traiter les applications purement gravitationnelles de cette théorie. Je suis donc impérativement conduit à abandonner l'hypothèse (i). Puisque je maintiens l'hypothèse (ii), cela signifie exactement qu'il doit exister un tenseur énergie additionnel, que j'appellerai "tenseur énergie d'interaction" $\boldsymbol{T}_{\text{inter}}$, tel que le tenseur énergie total $\boldsymbol{T}$ s'écrive

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\text{chg}} + \boldsymbol{T}_{\text{champ}} + \boldsymbol{T}_{\text{inter}}. \tag{29}$$

Sans l'hypothèse (i), il est clair que l'équation dynamique (9) appliquée au milieu chargé, jointe à l'hypothèse (ii), ne déterminent plus la dynamique du champ, donc ne déterminent pas le 2ème groupe. En particulier, le 2ème groupe standard postulé en RG :

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\mu_0 J^\mu, \tag{30}$$

devient compatible avec la théorie étudiée. Il implique la conservation de la charge.

Le lien entre optiques ondulatoire et géométrique est essentiellement inchangé [a6], en ce sens qu'il consiste encore à observer que l'équation dynamique (9) s'applique à un champ é.-m. “null” et que cette dynamique est identique à celle des photons individuels, comme je l'ai résumé au §3.3. La première différence avec le cas où l'on posait l'hypothèse (i) est que maintenant la dynamique (9) n'est plus *équivalente* au deuxième groupe d'équations de Maxwell [par ex. (30)], mais est simplement *compatible* avec lui. La deuxième différence est qu'il devient nécessaire de supposer qu'en effet la poussière de photons (champ é.-m. “null”) est soumise à une densité de force extérieure non-gravitationnelle : la réaction du milieu chargé [a6]. Cela semble très naturel.

L'équation (29) dit que la présence de la matière ordinaire produisant un champ é.-m. s'accompagne nécessairement (selon la théorie étudiée) de la présence d'une autre forme d'énergie, ayant $\boldsymbol{T}_{\text{inter}}$ pour tenseur énergie.

4 L'électrodynamique avec énergie d'interaction

L'introduction du tenseur énergie “d'interaction”, éq. (29), nécessite de réévaluer l'électrodynamique dans la théorie étudiée. Ceci fait l'objet du travail [a7]. En particulier, pour préciser les contraintes qui sont imposées à $\boldsymbol{T}_{\text{inter}}$, il faut examiner en détail quelles sont les équations indépendantes et quel est leur nombre. Il est naturel de commencer par la théorie standard.

4.1 Equations indépendantes dans la théorie standard

Par “théorie standard”, on entend ici l'électrodynamique en relativité générale (RG), ou à la rigueur dans une théorie métrique de la gravitation. Ceci inclut l'électrodynamique en relativité restreinte, comme le cas où la métrique est celle de Minkowski. Le premier groupe standard (11) des équations de Maxwell, joint au deuxième groupe standard (30), forment un système de huit équations scalaires linéairement indépendantes pour les six inconnues indépendantes $F_{\mu\nu}$ $(0 \leq \mu < \nu \leq 3)$ (dans le cas usuel où le 4-courant est donné). Néanmoins, et bien que certains auteurs aient affirmé le contraire, on s'accorde de plus en plus souvent à considérer que le système (11), (30) n'est pas surdéterminé ; cf. notamment Jiang, Wu & Povinelli, J. Comput. Phys. **125** (1996) 104. Liu (arXiv:1002.0892v9, 2018) a invoqué la notion d'identité différentielle (sans utiliser ce nom) mais n'a pas précisé quelles sont les identités pertinentes. J'ai identifié deux identités différentielles scalaires, qui concernent respectivement le premier groupe (11) et le deuxième groupe (30), et qui donc réduisent le nombre d'équations indépendantes à six, qui est le nombre d'inconnues. La première identité est :

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu\rho;\sigma} \equiv 0, \tag{31}$$

où $e_{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur totalement antisymétrique usuel. La deuxième de ces identités s'écrit

$$\left(F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \mu_0 J^\mu\right)_{;\mu} \equiv 0. \tag{32}$$

Elle est valide quand l'est la conservation de la charge

$$J^\mu{}_{;\mu} = 0, \tag{33}$$

laquelle est une condition de compatibilité du système (11), (30), qui découle de l'identité $F^{\mu\nu}{}_{;\nu;\mu} \equiv 0$. Dans le cas général d'un milieu chargé déformable, aux six inconnues du système s'ajoutent le 4-courant J^μ ainsi que les paramètres d'état du milieu déformable, disons seulement sa densité propre de masse-au-repos ρ^* (ce qui simplifie la discussion sans changer la nature du problème) — soit *cinq* inconnues en plus. Aux équations de Maxwell (11), (30), s'ajoute seulement l'équation dynamique du milieu chargé soumis à la force de Lorentz :

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{chg}\ ;\nu} = F^\mu{}_\lambda \, J^\lambda, \tag{34}$$

— soit *quatre* équations scalaires en plus seulement. Mais comme le 4-courant J^μ est ici une variable prenant a priori des valeurs arbitraires, l'équation (32) n'est pas une identité différentielle du système élargi (11), (30), (34) : tout comme la conservation de la charge (33), l'éq. (32) n'est valide que pour les *solutions* du système élargi. Il n'y a donc plus maintenant qu'une seule identité différentielle (31), ce qui laisse $4+4+4-1 = 11$ équations indépendantes pour les $6+5 = 11$ inconnues.

4.2 Equations indépendantes dans la théorie scalaire, sans tenseur d'interaction

Sous les hypothèses (i) (additivité des tenseurs énergie) et (ii) (validité de l'éq. (9) avec $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ pour le tenseur énergie total), la modification du deuxième groupe de Maxwell dans cette théorie de la gravitation s'écrit sous la forme (18), comme on l'a vu. Dans cette théorie, les équations de l'électrodynamique pour un milieu continu chargé et son champ é.-m. sont donc : le premier groupe de Maxwell (11) ; ce deuxième groupe modifié (18) ; et l'équation dynamique (15) du milieu chargé soumis à la force de Lorentz, remplaçant l'éq. (34) de la RG. Les inconnues sont les mêmes qu'en RG : les six composantes $F_{\mu\nu}$ $(0 \leq \mu < \nu \leq 3)$, les quatre composantes J^μ $(\mu = 0, ..., 3)$, et la densité ρ^*, soit onze inconnues. Et comme en RG, il n'y a que l'identité différentielle (31), donc il y a ici aussi 11 équations indépendantes pour les 11 inconnues.

4.3 Contraintes sur le tenseur d'interaction

En l'absence de champ de gravitation, i.e. dans la situation de la relativité restreinte (RR), la théorie scalaire doit se réduire à la RR, et ceci vaut donc aussi pour l'électrodynamique. Or, en RR (et aussi en RG), on voit facilement qu'on a

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{chg}\ \ ;\nu} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{champ}\ \ ;\nu} = 0, \tag{35}$$

ce qui est compatible avec l'additivité (hypothèse (i)) et fait qu'on peut supposer le tenseur d'interaction $\boldsymbol{T}_{\mathrm{inter}}$ *nul* en RR (et en RG). Comme on l'a vu au §3.5, il n'est pas possible de poser $\boldsymbol{T}_{\mathrm{inter}} = \mathbf{0}$ *a priori* dans la théorie scalaire. Par contre, rien n'empêche de supposer, comme il est naturel de le faire, que $\boldsymbol{T}_{\mathrm{inter}}$ est *invariant de Lorentz* en l'absence de gravitation dans cette théorie. J'ai prouvé [a8] (cf. §5) que ceci a lieu si *et seulement si* il est de la forme

$$T_{\mathrm{inter}\ \mu\nu} = p\,\eta_{\mu\nu} \qquad \text{(RR)}, \tag{36}$$

où p est un champ scalaire. Ceci est équivalent à

$$T^{\mu}_{\mathrm{inter}\ \ \nu} = p\,\delta^{\mu}_{\nu}, \tag{37}$$

mais cette équation est généralement-covariante. Avec une métrique générale $\boldsymbol{\gamma}$, elle équivaut à $(T_{\mathrm{inter}})_{\mu\nu} = p\,\gamma_{\mu\nu}$ au lieu de (36). Je postule donc la forme (37) pour le cas général avec gravitation, dans la théorie scalaire.

4.4 Fermeture de l'électrodynamique par la conservation de la charge

En présence du tenseur $\boldsymbol{T}_{\mathrm{inter}}$, la modification (18) du deuxième groupe de Maxwell n'est plus valide. En utilisant la décomposition générale (29) du tenseur énergie et l'équation dynamique (15) du milieu chargé, je montre [a7] qu'on obtient à la place de (18) :

$$F^{\mu}{}_{\lambda}\,F^{\lambda\nu}{}_{;\nu} = \mu_0\left[b^{\mu}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{champ}}) - F^{\mu}{}_{\nu}\,J^{\nu} - \delta^{\mu}(p)\right], \tag{38}$$

où

$$\delta_{\mu} := T_{\mathrm{inter}\ \mu\ \ ;\nu}^{\ \ \ \ \ \ \ \nu} - b_{\mu}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{inter}}). \tag{39}$$

Avec le tenseur d'interaction (37), il y a une seule inconnue en plus, p, dans l'électrodynamique de la théorie (en comparaison avec la situation sans ce tenseur, ou avec la situation en RG), soit donc douze inconnues. Les équations sont pour le moment : le premier groupe de Maxwell (11) ; ce nouveau deuxième groupe modifié (38) ; et l'équation dynamique (15) du milieu chargé — soit toujours onze équations, en sorte que l'on a une et une seule nouvelle équation scalaire à trouver. Or, on déduit facilement de (38) lorsque la matrice $(F^{\mu}{}_{\nu})$ est inversible [a7] :

$$J^{\mu}{}_{;\mu} = \left[G^{\mu}{}_{\nu}\,(b^{\nu}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{champ}}) - \delta^{\nu})\right]_{;\mu}, \qquad (G^{\mu}{}_{\nu}) := (F^{\mu}{}_{\nu})^{-1}. \tag{40}$$

Il est donc naturel d'imposer la conservation de la charge $J^{\mu}{}_{;\mu} = 0$ comme équation supplémentaire, soit

$$\left[G^{\mu\nu}\,(b_{\nu}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{champ}}) - \delta_{\nu})\right]_{;\mu} = 0, \tag{41}$$

ce qui ferme l'électrodynamique de la théorie en présence du tenseur d'interaction (37).

La définition (37) conduit [a7] pour la quantité δ_μ définie par (39) à

$$\delta_0 = p_{,0} - 3\,p\,\beta_{,0}\,\beta^{-1}, \tag{42}$$

$$\delta_i = p_{,i}, \tag{43}$$

ce qui s'annule si $p_{,\mu} = 0$. Il en résulte que, dans un champ gravitationnel constant ($\beta_{,0} = 0$), toutes les équations de l'électrodynamique modifiée : (11), (38), (15) et (40), sont satisfaites si $p =$ Constante, et si les autres inconnues ont les valeurs qu'elles ont en RG avec les conditions aux limites imposées. En admettant l'unicité de la solution (comme elle a lieu dans l'électrodynamique standard), ceci constitue donc la solution. Ainsi le champ p est constant dans un champ gravitationnel constant, et en particulier dans la situation de la RR. De plus cette constante doit être nulle, parce qu'à grande distance de tous les corps, le tenseur énergie total (29) doit être nul, comme le sont $\boldsymbol{T}_{\mathrm{chg}}$ et (asymptotiquement) $\boldsymbol{T}_{\mathrm{champ}}$. Donc l'additivité des tenseurs énergie (hypothèse (i)) est valable dans un champ gravitationnel constant, et en particulier dans la situation de la RR.

4.5 Détermination de l'énergie d'interaction dans un champ gravitationnel faible

Dans un champ gravitationnel faible, on a les développements (26) pour $\boldsymbol{F}$ et $\mathbf{J}$, et le développement suivant pour le champ p :

$$p = c^{2n-5}\left(\overset{0}{p} + c^{-2}\,\overset{1}{p} + O(c^{-4})\right), \tag{44}$$

où l'ordre $2n{-}5$ résulte de l'équation (41), qui impose que $\delta_\nu(p)$ soit du même ordre en $1/c^2$ que $b_\nu(\boldsymbol{T}_{\mathrm{champ}})$ [a7]. En utilisant ces développements dans cette même éq. (41), j'obtiens [a7] pour le champ de première approximation $p_1 := c^{2n-5}\,\overset{0}{p}$ une équation d'advection avec une source donnée :

$$\partial_T\,p_1 + u^j\,\partial_j\,p_1 = S. \tag{45}$$

Dans cette équation, le champ du 3-vecteur "vitesse" $\mathbf{u}(T, \mathbf{x}) = (u^j)$ dépend seulement des valeurs en $(T, \mathbf{x})$ du champ é.-m. de première approximation $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ et de ses dérivées premières, ce champ obéissant aux éqs. de Maxwell standard dans un espace-temps plat [a6, a7]. Tandis que la source $S(T, \mathbf{x})$ dépend aussi [a7] de la valeur en $(T, \mathbf{x})$ de $\partial_T U$ et de son gradient spatial, U étant le potentiel newtonien. L'éq. (45) se résout explicitement par intégration le long des caractéristiques, qui sont les courbes intégrales du champ $\mathbf{u}(T, \mathbf{x})$. En notant $\mathcal{C}_{T_0\ \mathbf{x}_0}$ la courbe intégrale qui passe en $\mathbf{x}_0$ au temps T_0, on a [a7]:

$$p_1(T, \mathcal{C}_{T_0\ \mathbf{x}_0}(T)) - p_1(T_0, \mathbf{x}_0) = \int_{T_0}^{T} S(t, \mathcal{C}_{T_0\ \mathbf{x}_0}(t))\,\mathrm{d}t. \tag{46}$$

Ceci permet en principe de calculer explicitement l'énergie d'interaction dans un champ gravitationnel (faible) et un champ é.-m. donnés.

5 Tenseurs d'ordre 2 qui sont Lorentz-invariants

La forme (37) pour le tenseur d'interaction $\boldsymbol{T}_{\text{inter}}$ découle bien du postulat de l'invariance de Lorentz de $\boldsymbol{T}_{\text{inter}}$ en RR, *pourvu que* l'on puisse prouver qu'en effet tout tenseur d'ordre 2 qui est invariant par le groupe de Lorentz a bien la forme (36). On trouve cette affirmation dans la littérature, mais en général sous une forme incorrecte ("η est le seul tenseur d'ordre 2 qui soit Lorentz-invariant"), et surtout on n'en trouve pas une preuve correcte — en tout cas je n'en ai pas vu. J'ai cherché personnellement, et trouvé, une preuve que je crois complète et correcte [a8]. Elle remplit tout de même plus de huit pages. Je vais la résumer. Un tenseur $\boldsymbol{T}$ de type (0 2) en un point X de l'espace-temps de Minkowski $\mathbf{M}$ est Lorentz-invariant ssi, $T = (T_{\mu\nu})$ étant la matrice des composantes de $\boldsymbol{T}$ dans un certain système de coordonnées cartésien (au demeurant arbitraire), on a pour toute matrice $L = (L^\mu{}_\nu)$ appartenant au groupe de Lorentz (réel) $\mathsf{O}(1,3)$:

$$L^T\, T\, L = T. \tag{47}$$

En utilisant le fait que, par définition, la matrice η de la métrique de Minkowski en coordonnées cartésiennes est l'une des matrices T qui vérifient (47), on trouve que

$$\forall L \in \mathsf{O}(1,3), \quad L^T\,(T\,\eta) = (T\,\eta)\,L^T. \tag{48}$$

Si l'on prouve que l'ensemble de matrices $\mathrm{S}' := \{L^T\,;\ L \in \mathsf{O}(1,3)\}$ est un ensemble irréductible de matrices (complexes), il résulte de (48) et du Lemme de Schur que la matrice $M = T\eta$ est un multiple de la matrice identité I ; et de là, que T est un multiple de η, i.e., ce qu'on veut prouver. [4] Pour prouver que l'ensemble S' ci-dessus est irréductible, je prouve que l'ensemble (beaucoup) plus petit S, constitué des deux matrices de rotation L_i d'angle θ_i ($0 < \theta_i < \pi$) autour de e_i ($i = 1, 2$), et du "boost" L'_1 de Lorentz dans la direction e_1 avec un coefficient $\beta_v := \frac{v}{c}$, $0 < \beta_v < 1$, est un ensemble irréductible de trois matrices complexes 4×4. (Ici (e_μ) ($\mu = 0, ..., 3$) est la base canonique de $\mathbb{C}^4$, avec $e_\mu = (\delta^\nu_\mu)_{\nu=0,...,3}$.) Et pour prouver cela, je détermine d'abord *explicitement* la liste des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^4$ qui sont (globalement) invariants par la rotation L_i ($i = 1, 2$), en

[4] Sur un forum, le participant "AccidentalFourierTransform" trouve en partant de (47) que $L^T T = T L^T$ au lieu de (48) [voir en-dessous de son éq. (11)] — ce qui est faux car cela entraînerait que T est un multiple de la matrice identité (au lieu de η). Il affirme d'ailleurs effectivement que "Par le Lemme de Schur, T doit être un multiple de l'identité. QED." (C'est faux et en effet ce n'est pas ce qu'on veut montrer.) D'autre part, il ne dit pas à quel ensemble de matrices il applique le Lemme de Schur, et donc il ne dit pas pourquoi cet ensemble est bien irréductible. Or, c'est justement la preuve que l'ensemble S' ci-dessus est irréductible qui me prend sept pages.

utilisant le fait que ses valeurs propres complexes sont $1, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}$ avec $\lambda_{1i} \neq \lambda_{2i}$, $\lambda_{1i} \neq 1$, $\lambda_{2i} \neq 1$, et un lemme qui dit ceci :

Si un espace vectoriel E, de dimension finie, est la somme directe du sous-espace propre F d'un endomorphisme T de E pour une valeur propre λ et de l'espace engendré par n vecteurs propres v_j correspondant à des valeurs propres de T deux à deux distinctes et distinctes de λ, alors tout espace invariant par T a la forme

$$\mathrm{W} = \mathrm{Span}\{(u_i)_{i\in \mathrm{I}}; (v_j)_{j\in \mathrm{J}}\}, \tag{49}$$

où $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ ($0 \leq p := \mathrm{Card(I)} \leq \dim \mathrm{F}$) est une famille de vecteurs linéairement independants de F, et où $(v_j)_{j\in\mathrm{J}}$ ($0 \leq q := \mathrm{Card(J)} \leq n$) est une famille de vecteurs extraite de $(v_j)_{j=1,\ldots,n}$.

(La preuve de ce lemme [a8] utilise des résultats plus basiques sur les sous-espaces invariants par un endomorphisme, lesquels résultats font partie de la littérature.) Puis en utilisant ces deux listes, je détermine quels sont les sous-espaces invariants à la fois par L_1 et par L_2, et je vérifie qu'aucun de ces derniers n'est invariant par le "boost" L'_1 — ce qui démontre l'irréductibilité de l'ensemble S, et donc celle de l'ensemble $\mathrm{S}' \supset \mathrm{S}$.

6 Mouvement d'une particule d'épreuve et mécanique céleste dans la théorie scalaire

La mécanique céleste a été testée (par le calcul d'éphémérides) pour la première version ("v1") de la théorie scalaire [B21], [O1], [A31]. Ce sont justement ces tests (par ailleurs satisfaisants) qui ont mis en évidence une violation du principe d'équivalence faible dans cette première version [A33] et ont conduit à proposer une deuxième version ("v2"), avec métrique spatiale isotrope, qui ne souffre pas de ce problème [A35]. Mais cette deuxième version n'avait pas été testée en mécanique céleste. Le test de v2 en mécanique céleste est le travail que j'ai entrepris en collaboration avec Rainer Winkler [a9].

6.1 Equation de mouvement d'une particule d'épreuve

L'équation de mouvement d'une particule d'épreuve dans v2 découle de façon unique de l'extension (6) de la deuxième loi de Newton et de la forme postulée [A35] pour la métrique "physique" courbe $\boldsymbol{\gamma}$ (en coordonnées cartésiennes x^μ pour la métrique plate "de fond" $\boldsymbol{\gamma}^0$, et adaptées au fluide de référence privilégié $\mathcal{E}$ postulé par la théorie) :

$$\mathrm{d}s^2 := \gamma_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \beta^2(\mathrm{d}x^0)^2 - \beta^{-2}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^i. \tag{50}$$

Mais cette équation de mouvement n'avait pas encore été écrite explicitement. J'ai d'abord remarqué que l'équation de mouvement générale pour une particule d'épreuve, obtenue pour v1 [A19], est valable aussi pour v2, malgré la relation différente entre la métrique spatiale "physique" (courbe) $\boldsymbol{g}$ et la métrique spatiale "de fond" (plate, i.e. euclidienne) $\boldsymbol{g}^0$. Ceci a lieu parce que l'expression de l'accélération de la gravité $\mathbf{g}$ avec la métrique spatiale plate se trouve être la même, très simple, dans v1 [A19] et dans v2 [a9] :

$$\mathbf{g} = -\frac{c^2}{2} \nabla_0 \, \beta^2, \qquad \nabla_0 f := \mathrm{grad}_{\boldsymbol{g}^0} f := g^{0\,ij} f_{,j} \, \partial_i. \tag{51}$$

En partant donc de l'équation de mouvement générale pour une particule d'épreuve, commune à v1 et v2, mais en utilisant pleinement la forme de la métrique spatiale de v2 (visible sur l'éq. (50)), j'obtiens (encore en coordonnées cartésiennes x^μ pour $\boldsymbol{\gamma}^0$ et adaptées au fluide de référence $\mathcal{E}$, et avec $T := x^0/c$) :

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}T} = -2\psi_{,T} u^i - 4\psi_{,j} \, u^j \, u^i + \psi_{,i} \, u^j \, u^j + c^2 e^{-4\psi} \psi_{,i}, \tag{52}$$

où $\mathbf{u} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}T}$ est la "vitesse absolue" de la particule d'épreuve dans le référentiel privilégié, et où

$$\psi := -\mathrm{Log} \, \beta := -\mathrm{Log} \sqrt{\gamma_{00}}. \tag{53}$$

6.2 Champ gravitationnel d'un corps en translation uniforme

Pour utiliser l'éq. (52), il faut connaître le champ gravitationnel, β ou ψ, éq. (53). Un cas simple est celui où ce champ est produit par un corps B en translation uniforme (à vitesse constante $\mathbf{V}$), auquel cas la densité d'énergie $\sigma := (T^{00})_{\mathcal{E}}$, qui est la source du champ ψ, vérifie :

$$\sigma(T, \mathbf{x} + \mathbf{V}T) = \sigma(T = 0, \mathbf{x}). \tag{54}$$

On s'attend alors à ce que ce même champ scalaire σ, transporté dans le référentiel inertiel $\mathcal{E}_\mathbf{V}$ qui va à la vitesse uniforme et constante $\mathbf{V}$ par rapport à $\mathcal{E}$:

$$\sigma'(\mathbf{X}') := \sigma(\mathbf{X}(\mathbf{X}')), \tag{55}$$

soit indépendant du temps, i.e.,

$$\sigma' = \sigma'(x'^1, x'^2, x'^3) = \sigma'(\mathbf{x}'). \tag{56}$$

(Ici "inertiel" se réfère à la métrique plate $\boldsymbol{\gamma}^0$ [a9]. $\mathbf{X}' := (x'^\mu)$ sont des coordonnées adaptées à $\mathcal{E}_\mathbf{V}$, tandis que $\mathbf{X} := (x^\mu)$ sont des coordonnées adaptées à $\mathcal{E}$; et $x'^0 = cT'$, $x^0 = cT$, où T' (resp. T) est le temps inertiel dans $\mathcal{E}_\mathbf{V}$ (resp. dans $\mathcal{E}$).) La relation (56) est facile à déduire de (54) et (55) dans le cas où la transformation des coordonnées, $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}'$, est celle dite de Galilée, qui s'applique en physique non-relativiste. Cette même déduction a lieu aussi dans le cas pertinent, où la transformation des coordonnées est celle de Lorentz, mais elle est moins facile [a9].

L'équation du champ ψ est l'équation des ondes usuelle avec la source σ [A35] : en coordonnées cartésiennes x^μ pour $\boldsymbol{\gamma}^0$ et adaptées au fluide de référence $\mathcal{E}$,

$$\Box\psi := \frac{\partial^2\psi}{\partial(x^0)^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^i} = \kappa\sigma, \qquad \kappa := \frac{4\pi G}{c^2}. \tag{57}$$

Comme l'opérateur de d'Alembert $\Box$ est Lorentz-invariant, si l'on définit ψ' de façon identique à σ' [éq. (55)], on a donc en coordonnées cartésiennes x'^μ pour $\boldsymbol{\gamma}^0$ et adaptées au fluide de référence $\mathcal{E}_\mathbf{V}$:

$$\Box\psi' := \frac{\partial^2\psi'}{\partial(x'^0)^2} - \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^i \partial x'^i} = \kappa\sigma'. \tag{58}$$

La solution pertinente de cette équation est le potentiel retardé classique

$$\psi'(T', \mathbf{x}') = \frac{\kappa}{4\pi}\int_\mathrm{B} \sigma'\left(T' - \frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|}{c}, \mathbf{y}'\right)\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{y}'}{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|}. \tag{59}$$

Mais à cause de l'indépendance de σ' par rapport au temps T', éq. (56), le retard n'intervient pas et l'on obtient donc un potentiel newtonien :

$$\psi' = \psi'(\mathbf{x}') = \frac{G}{c^2}\int_\mathrm{B} \frac{\sigma'(\mathbf{y}')}{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|}\,\mathrm{d}^3\mathbf{y}'. \tag{60}$$

On obtient donc une solution exacte très simple dans ce cas particulier important. Pour utiliser l'équation de mouvement (52), il reste à exprimer les dérivées de ψ par rapport aux coordonnées "fixes" x^μ, qui interviennent dans (52), en fonction des dérivées de ψ' par rapport aux coordonnées "mobiles" x'^μ, qui sont aisément calculables grâce à (60). Ceci est fait en utilisant la transformation de Lorentz qui relie les x'^μ aux x^μ.

6.3 Accélération due à un corps sphérique en mouvement uniforme

Dans le cas où la densité d'énergie du corps en mouvement uniforme, vue dans son propre référentiel [éq. (55)], a la symétrie sphérique, le potentiel newtonien (60) prend la forme bien connue

$$c^2\psi' = c^2\psi'(r') = \frac{G\,M}{r'}, \qquad M := \int_\mathrm{B} \sigma'(r')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}', \tag{61}$$

où $r' := |\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_b|$, $\mathbf{x}'_b = \text{Constante}$ étant la position fixe du centre de symétrie du corps massif B dans le référentiel en mouvement $\mathcal{E}_\mathbf{V}$. L'équation de mouvement obtenue précédemment se met alors sous une forme simple contenant l'accélération newtonienne $GM\mathbf{h}'(T)$, avec

$$\mathbf{h}'(T) := -\frac{\mathbf{r}'_{ab}(T)}{R'^{3}_{ab}(T)} \tag{62}$$

(où $\mathbf{r}'_{ab}(T) := \mathbf{x}'_a(T) - \mathbf{x}'_b$ et $R'_{ab}(T) := |\mathbf{r}'_{ab}(T)|$, $\mathbf{x}'_a(T)$ étant la position de la particule d'épreuve dans $\mathcal{E}_{\mathbf{V}}$), et dépendant, entre autres, de la vitesse $\mathbf{V}$. A savoir :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}T} = \frac{GM}{c^2}\left[-2h_V\mathbf{u} - 4(\mathbf{h}.\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{u}^2\mathbf{h} + c^2\beta^4\mathbf{h}\right], \tag{63}$$

avec

$$\mathbf{h} := \mathbf{h}'(T) + (\gamma - 1)\,\frac{\mathbf{V}.\mathbf{h}'}{V^2}\mathbf{V} \tag{64}$$

et

$$h_V := -\gamma\mathbf{h}'.\mathbf{V}. \tag{65}$$

L''accélération (63) est exacte. Rainer Winkler l'a réexprimée dans le référentiel en mouvement $\mathcal{E}_{\mathbf{V}}$, en utilisant les transformations de Lorentz de la vitesse et de l'accélération, et en négligeant les termes d'ordre c^{-4} ou plus élevé. L'accélération obtenue se scinde en deux parties :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}T'}\right)_{\mathbf{V}=\mathbf{0}} = -\frac{GM}{r'^3}\left\{\mathbf{r}' + \frac{1}{c^2}\left[\left(\mathbf{u}'^2 - 4\frac{GM}{r'}\right)\mathbf{r}' - 4\left(\mathbf{r}'.\mathbf{u}'\right)\mathbf{u}'\right]\right\} + O\left(c^{-4}\right) \tag{66}$$

et

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}T'}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}T'}\right)_{\mathbf{V}=\mathbf{0}} = \frac{GM}{c^2\,r'^3}\left\{\left[\mathbf{r}'.\left(\mathbf{V} + 4\mathbf{u}'\right)\right]\mathbf{V} + \left(\mathbf{r}'.\mathbf{V}\right)\mathbf{u}' - \left(4\mathbf{u}'.\mathbf{V} + 2V^2\right)\mathbf{r}'\right\} + O\left(c^{-4}\right). \tag{67}$$

La partie indépendante de $\mathbf{V}$, éq. (66), est exactement l'accélération post-newtonienne d'une particule d'épreuve en RG, telle qu'on la trouve à partir de la forme spatialement-isotrope de la métrique statique à symétrie sphérique en RG (cf. par ex. Weinberg, Gravitation & Cosmology, éqs. (9.5.3) et (9.5.14)). L'autre partie, éq. (67), contient les effets de référentiel privilégié.

6.4 Application au test de la théorie en mécanique céleste

Nous schématisons le système solaire comme un ensemble de N points matériels. Nous prenons en compte, pour chacun de ces N corps, l'accélération newtonienne due aux $N-1$ autres corps ; nous négligeons les corrections post-newtoniennes (PN) à cette accélération qui sont dues aux autres corps que le corps (N), i.e. le Soleil ; et nous calculons l'accélération due au Soleil par l'éq. (63), en y remplaçant $\mathbf{V}$ par la vitesse $\mathbf{u}_N$ du Soleil par rapport au référentiel privilégié $\mathcal{E}$ (qui n'est pas exactement constante).

Nous avons implanté cette équation de mouvement dans un logiciel de calcul d'éphémérides avec optimisation de paramètres, que j'avais précédemment construit et testé pour v1 [A30], [O1], [A31]. Le programme boucle sur l'intégration numérique de l'équation de mouvement pour les N corps considérés, de façon à minimiser le résidu quadratique par rapport aux positions et vitesses héliocentriques des planètes, telles qu'elles sont données par l'éphéméride DE403 du JPL. Les paramètres cherchés par cette optimisation sont les conditions initiales (positions et vitesses héliocentriques) des planètes, leur masses, et la vitesse dans $\mathcal{E}$ du barycentre du système, qui est maintenant ce que nous notons $\mathbf{V}$. (Cette dernière non plus n'est pas exactement constante dans ce schéma, mais nous trouvons que sa variation sur un siècle est complètement négligeable.) Après cette optimisation, nous trouvons que la différence entre notre calcul et DE403 est au niveau de 10 mas sur un siècle, sauf pour Mercure (0.2 arcsec).

Comme on l'a mentionné au §6.3, la forme (63) que nous utilisons pour l'accélération due au Soleil coïncide avec l'accélération post-newtonienne d'une particule d'épreuve en RG, lorsque $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, i.e. maintenant lorsque $\mathbf{u}_N = \mathbf{0}$ — tandis que la forme que nous utilisons pour l'accélération due aux planètes se limite à l'accélération newtonienne. Or l'éphéméride DE403 est pratiquement indistinguable, au niveau de précision pertinent, d'éphémérides telle que VSOP2000, qui sont calculées précisément avec ces deux approximations : i.e., l'accélération due au Soleil est l'accélération post-newtonienne d'une particule d'épreuve en RG, tandis que l'accélération due aux planètes se limite à l'accélération newtonienne. Par conséquent, on s'attend à ce que la minimisation du résidu quadratique par rapport à DE403 tende à rapprocher le plus possible $\mathbf{u}_N$ (la vitesse du Soleil par rapport à $\mathcal{E}$) de $\mathbf{0}$. Ce qui équivaut à dire que $\mathbf{V}$, qui est maintenant la vitesse du barycentre par rapport à $\mathcal{E}$, devrait être trouvé aussi près que possible de la vitesse du barycentre par rapport au Soleil, soit environ 40 km/h (et variable). C'est bien l'ordre de grandeur que nous trouvons pour le module V. Pour tester ce que dit la théorie de V, il faudra minimiser le résidu par rapport à des observations directes, et non par rapport à une éphéméride basée sur la RG. Il faudra aussi, sans doute, utiliser une approximation plus réaliste, prenant en compte les champs propres des astres.

7 Un modèle analytique du champ de Maxwell dans une galaxie axisymétrique

Comme on l'a vu au §3.5 : pour la théorie scalaire, le problème de la conservation de la charge dans l'électrodynamique en présence de gravitation conduit à abandonner l'hypothèse (i) d'additivité des tenseurs énergie de la matière et du champ é.-m., et à introduire un tenseur énergie "d'interaction", éq. (29). En particulier, au §4.5, on a établi des formules qui permettent en principe de calculer cette énergie d'interaction si l'on connaît le champ gravitationnel (faible) et le champ é.-m.. Cette énergie pourrait contribuer à la "matière noire". Pour voir ce qu'il en est, il faut construire un modèle analytique du champ é.-m. dans une galaxie, qui soit solution des éqs. de Maxwell — de façon à pouvoir utiliser ces formules. En première approximation, une galaxie-disque est un objet axisymétrique, et le champ de radiation interstellaire devrait donc (à l'échelle intra-galactique) posséder également cette symétrie, au moins de façon approchée.

7.1 Représentation explicite des champs de Maxwell libres à symétrie axiale

Garay-Avendaño & Zamboni-Rached (Appl. Opt. **53** (2014) 4524) introduisent deux classes de solutions axisymétriques des éqs. de Maxwell "libres" (i.e. dans le vide). Leur but est fort différent de celui qui vient d'être indiqué, puisqu'il s'agit pour eux de décrire la propagation de faisceaux é.-m. non-paraxiaux, très étroits. Néanmoins ils notent que la fonction scalaire dont ils partent :

$$\Psi_{\omega\ S}\,(t, \rho, z) = e^{-\mathrm{i}\omega t} \int_{-K}^{+K} J_0\left(\rho\sqrt{K^2 - k^2}\right)\ e^{\mathrm{i}k\,z}\, S(k)\,\mathrm{d}k, \tag{68}$$

est la forme générale pour une solution harmonique par rapport au temps (ci-après *"harmonique"*), "totalement propageante", et axisymétrique de l'équation des ondes *scalaire*. (Ici ω est la fréquence angulaire ou pulsation, $K := \omega/c$, J_0 est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0, et S est le "spectre en vecteurs d'onde", fonction de la composante axiale $k = k_z \in [-K, +K]$ du vecteur d'ondes.) La première classe de solutions qu'ils introduisent est obtenue en associant à une telle onde scalaire Ψ le potentiel vecteur harmonique

$$\mathbf{A} := \Psi\mathbf{e}_z, \qquad \text{ou} \quad A_z := \Psi, \quad A_\rho = A_\phi = 0, \tag{69}$$

où $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ est la base orthonormée "mobile" standard associée aux coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z. La deuxième classe se déduit de la première par la dualité é.-m. :

$$\mathbf{E}' = c\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -\mathbf{E}/c. \tag{70}$$

On trouve que la première classe a des composantes E_ϕ, B_ρ, B_z nulles. Il en résulte d'après (70) que la deuxième classe a des composantes B'_ϕ, E'_ρ, E'_z nulles.

Je me suis demandé si, en additionnant deux solutions appropriées de la première et de la deuxième classe, on pouvait décrire toutes les solutions harmoniques et axisymétriques des éqs. de Maxwell libres. La réponse (positive) à cette question a été trouvée en plusieurs étapes, qui n'étaient pas évidentes [a10]. J'ai d'abord obtenu, après quelques calculs, une condition suffisante pour que, partant d'une certaine solution harmonique et axisymétrique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ des éqs. de Maxwell libres, une certaine solution de la première classe ait ses composantes non nulles $B_{1\phi}, E_{1\rho}, E_{1z}$ égales aux composantes correspondantes B_ϕ, E_ρ, E_z de la solution de départ : à savoir, il suffit que l'on ait $B_{1\phi} = B_\phi$. Il en résulte en utilisant la dualité une condition suffisante pour qu'une certaine solution de la deuxième classe ait ses composantes non nulles $E'_{2\phi}$, $B'_{2\rho}$, B'_{2z} égales aux composantes correspondantes E_ϕ, B_ρ, B_z de la solution de départ : à savoir, il suffit que l'on ait $E'_{2\phi} = E_\phi$. Et c'est cette dernière condition dont j'ai pu montrer, après d'autres calculs, qu'elle peut toujours être satisfaite en construisant un potentiel scalaire approprié A_{2z} et en lui associant un potentiel vecteur par (69) puis le champ é.-m. dual (70) du champ harmonique dérivant de ce potentiel vecteur. En partant d'une solution harmonique et axisymétrique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ *quelconque* des éqs. de Maxwell libres, on sait donc trouver, de façon *constructive,* une solution de la deuxième classe dont les composantes non nulles $E'_{2\phi}$, $B'_{2\rho}$, B'_{2z} sont égales aux composantes correspondantes E_ϕ, B_ρ, B_z de la solution de départ. Enfin, en utilisant à nouveau la dualité, on prouve l'existence d'une solution de la première classe dont les composantes non nulles $B_{1\phi}, E_{1\rho}, E_{1z}$ sont égales aux composantes correspondantes B_ϕ, E_ρ, E_z de la solution de départ. Ceci achève de prouver que la question posée au début de ce paragraphe a une réponse positive.

Les champs de Maxwell libres à dépendance générale du temps s'obtiennent par sommation sur les fréquences de champs à dépendance harmonique du temps. Le résultat précédent entraîne donc que tout champ de Maxwell libre axisymétrique et totalement propageant a une expression explicite [a10] comme la somme sur les fréquences de solutions de la première et de la deuxième classe introduites par Garay-Avendaño & Zamboni-Rached — ci-après solutions GAZR1 et GAZR2.

7.2 Description du modèle

L'hypothèse principale du modèle [a11] est simplement que le champ é.-m. intragalactique a une symétrie axiale autour de l'axe du disque galactique, ce qui semble une bonne première approximation malgré le fait qu'elle met de côté des aspects observés tels que les bras d'une galaxie spirale. Il résulte de cette simplification que l'on peut appliquer le résultat précédent. On considérera de plus que le spectre de fréquences est discret : (ω_j, ω'_j) $(j = 1, ..., N_\omega)$, les fréquences ω_j correspondant aux solutions GAZR1, et les fréquences ω'_j aux solutions GAZR2. Le champ est donc la somme de N_ω solutions GAZR1 de fréquences ω_j, chacune étant caractérisée par un "spectre" S_j, qui définit l'onde scalaire Ψ_j [éq. (68)], et de N_ω solutions GAZR2 de fréquences ω'_j, avec des spectres S'_j. Pour déterminer la "forme" du champ, i.e. pour déterminer les spectres S_j et S'_j à un facteur multiplicatif commun près, je lisse la somme des champs qu'émettent les différentes étoiles de la galaxie par une somme d'expressions (68) avec les fréquences ω_j et ω'_j, et les spectres inconnus S_j et S'_j. Chaque étoile est schématisée par un point et est supposée émettre une onde scalaire sphérique qui se décompose en ondes sphériques harmoniques de fréquences ω_j et ω'_j. La distribution des étoiles (i.e. l'ensemble S de ces points) est obtenue par génération aléatoire de leurs coordonnées cylindriques $(\rho_i, z_{ij}, \phi_{ijk})$: je suppose une distribution exponentielle pour $\rho > 0$ et pour $|z|$, et une distribution uniforme pour l'azimuth ϕ (ce dernier point assure la symétrie axiale).

Une difficulté numérique importante vient du rapport

$$\frac{\text{distances galactiques}}{\text{longueur d'onde}} \simeq \frac{\text{kpc}}{\mu\text{m}} \simeq 3 \times 10^{25}. \tag{71}$$

A cause de l'énormité de ce nombre, il n'est pas réalisable de déterminer chaque spectre S_j (et S'_j) par ses coefficients de Fourier (je montre qu'il faudrait avoir un nombre de coefficients de Fourier du même ordre de grandeur que ce rapport). Déterminer S_j par transformation de Fourier inverse en partant de (68) ne fonctionne pas non plus numériquement. Ce qui fonctionne est de discrétiser les spectres. Chaque spectre S_j est donc caractérisé par les valeurs

$$S_{nj} := S_j(k_{nj}) \quad (n = 0, ..., N, \quad j = 1, ..., N_\omega), \tag{72}$$

où k_{nj} $(n = 0, ..., N)$ est une discrétisation régulière de l'intervalle d'intégration $[-K_j, +K_j]$ pour k. Les arguments des fonctions circulaires et de Bessel qui interviennent dans les éqs. du type (68) ont le même ordre de grandeur que le rapport (71) et doivent être connus avec une précision bien meilleure que $O(1)$, ce qui oblige à utiliser la quadruple précision.

7.3 Premiers résultats

Le lissage est fait sur une grille spatio-temporelle régulière. Je fais varier ρ et z dans un domaine de l'ordre des dimensions galactiques ($0 \leq \rho \leq 10$ kpc, $-0.5\,\text{kpc} \leq z \leq 0.5\,\text{kpc}$), et t dans une période de la fréquence centrale du spectre, $T_0 = \lambda_0/c$ avec $\lambda_0 = 0.5\,\mu$m [a11]. Je n'ai pour le moment considéré que des solutions GAZR1, donc des composantes B_ϕ, E_ρ, E_z non nulles. Je trouve que la composante E_z domine largement E_ρ sur l'axe de symétrie Oz, mais pas à distance de celui-ci. La capacité d'extrapolation de la grille de lissage à une autre grille est limitée.

8 Publications depuis 2015

8.1 Revues avec comité de lecture

8.1.1 Revues avec comité de lecture : articles parus de janvier 2015 à décembre 2019

[a1] M.A., "Some remarks on quantum mechanics in a curved spacetime, especially for a Dirac particle", *International Journal of Theoretical Physics* **54**,

No. 7, 2218-2235 (2015).

[a2] M.A., "Defining the space in a general spacetime", *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **13**, No. 3 (2016) 1650031 [30 pages].

[a3] M.A., "On the definition of energy for a continuum, its conservation laws, and the energy-momentum tensor", Review Article, *Advances in Mathematical Physics* **2016** (2016) 9679460 [15 pages].

[a4] M.A., "Continuum dynamics and the electromagnetic field in the scalar ether theory of gravitation", *Open Physics* **14**, 395-409 (2016).

[a5] M.A., "Is spacetime as physical as is space?", *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* **46**, 1-24 (2017).

[a6] M.A., "Charge conservation in a gravitational field in the scalar ether theory", *Open Physics* **15**, 877-890 (2017).

[a7] M.A., "On the equations of electrodynamics in a flat or curved spacetime and a possible interaction energy", *Open Physics* **16**, 488-498 (2018)

[a8] M.A., "Lorentz-invariant second-order tensors and an irreducible set of matrices", *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* **50**, 1-10 (2018).

[a9] M.A., R. W. Winkler, "Motion of a test particle according to the scalar ether theory of gravitation and application to its celestial mechanics", *Zeitschrift für Naturforschung A* **74**, No 4, 305-316 (2019).

8.1.2 Revues avec comité de lecture : articles à paraître ou en préparation

[a10] M.A., "An explicit representation for the axisymmetric solutions of the free Maxwell equations", accepté pour publication dans *Open Physics*.

[a11] M.A., "An analytical model for the Maxwell field due to stellar radiation in an axially symmetric galaxy", en préparation (texte étendu de la communication [c1]).

8.2 Conférences invitées dans des congrès

[i1] M.A., " Some remarks on the definition of classical energy and its conservation laws", Texte d'une conférence invitée à la *Fourth International Conference on Theoretical Physics "Theoretical Physics and its Applications"*, organisée par Timur F. Kamalov *et al.*; Moscow State Pedagogical University et Moscow Institute of Physics and Technology, 3-5 juillet 2015.

8.3 Actes de colloques avec comité de lecture

[b1] M.A., "On the Hamiltonian and energy operators in a curved spacetime, especially for a Dirac particle", texte d'un exposé oral au *Seventh International Workshop "Spacetime - Matter - Quantum Mechanics, DICE2014*, Castiglioncello (Italie), 15–19 septembre 2014, organisé par Hans-Thomas Elze *et al.*. Paru dans les Actes (H.-T. Elze *et al.*, éds.) : *J. Phys. Conf. Ser.* **626**, 012030, 2015 [8 pages].

[b2] M.A., "On continuum dynamics and the electromagnetic field in the scalar ether theory of gravitation", texte d'un exposé oral à la *10th Biennial Conference on Classical and Quantum Relativistic Dynamics of Particles and Fields (IARD 2016)*, Ljubljana, Slovénie, 6–9 juin 2016, organisée par Matej Pavšič *et al.*. Paru dans les Actes (Martin Land *et al.*, éds.) : *J. Phys. Conf. Ser.* **845**, 012014 (2017) [9 pages].

[b3] M.A., "On charge conservation in a gravitational field", texte de deux exposés oraux donnés à la *XIXth International Conference "Geometry, Integrability and Quantization"*, Varna, Bulgarie, 2–7 juin 2017, organisée par Ivaïlo Mladenov *et al.*. Paru dans les Actes du même nom (Ivaïlo M. Mladenov et Akira Yoshioka, éds., Sofia: Avangard Prima, 2018), pp. 57-65 ; (disponible sur HAL).

[b4] M.A., "Interaction energy of a charged medium and its EM field in a curved spacetime", texte d'une "plenary talk" donnée à la *XXth International Conference "Geometry, Integrability and Quantization"*, Varna, Bulgarie, 2–7 juin 2018, organisée par Ivaïlo Mladenov *et al.*. Paru dans les Actes du même nom (I. M. Mladenov, V. Pulov, et A. Yoshioka, éds., Sofia: Avangard Prima, 2019), pp. 88-98 ; (disponible sur HAL).

8.4 Communications à des congrès, symposium

N.B. : les communications dont le texte a été publié dans des Actes ne sont pas reprises ici.

[c1] M.A., "An analytical model of the EM field in an axially symmetric galaxy", Communication orale à la Conférence Internationale *Challenges and Innovations in Computational Astrophysics* (organisée par la Commission B1 de l'IAU), Saint Pétersbourg, Fédération de Russie, 16–20 septembre 2019. Texte étendu en préparation, voir [a11].

8.5 Séminaires, workshops

[s1] "L'espace-temps et sa courbure : réalités physiques ou concepts mathématiques ? Une vue alternative de la gravitation et quelques conséquences", *Séminaire du Laboratoire Sols-Solides-Structures-Risques*, 17 novembre 2016. Résumé. Transparents.

9 Objectifs / Projet de recherche

9.1 Mécanique céleste de la théorie scalaire

L'article [a9] montre (cf. §6.4) qu'à l'approximation considérée dans ce travail (i.e. essentiellement : le centre de masse de chaque corps céleste se meut comme une particule d'épreuve dans le champ gravitationnel créé par les autres corps), la théorie scalaire conduit aux mêmes équations de mouvement que la RG, *plus* des perturbations qui dépendent de la vitesse $\mathbf{V}$ du barycentre du système par rapport au référentiel privilégié $\mathcal{E}$ postulé par cette théorie, et qui s'annulent avec $\mathbf{V}$. Comme nous l'avons argumenté, ceci rend naturel que le programme d'optimisation des paramètres trouve que la vitesse $\mathbf{V}$ est très faible, lorsque les données utilisées pour l'optimisation sont extraites d'une éphéméride basée sur la RG. Pour savoir ce que dit réellement la confrontation observationnelle de cette théorie quant à la vitesse $\mathbf{V}$, il est donc important de chercher à ajuster les paramètres par rapport à des données observationnelles les plus "directes" possibles, non affectées par une "réduction" utilisant la RG, mais au contraire, si possible, en effectuant la réduction de façon interne à la théorie étudiée. Il s'agit à l'évidence d'une tâche lourde, et qui pour être menée à bien devrait préférablement être réalisée en collaboration avec des spécialistes. Parallèlement, il est nécessaire de déterminer les équations de mouvement avec une approximation meilleure physiquement, consistant à prendre en compte la structure des corps étendus que sont les corps célestes, y compris leur rotation propre, comme je l'avais fait [A25]–[A26], [A32] pour la première version [A15], [A20] de cette théorie.

9.2 Energie d'interaction et matière noire

Dans la théorie scalaire étudiée, on doit, en présence d'un champ de gravitation variable, renoncer à l'hypothèse (i) d'additivité des tenseurs énergie de la matière et du champ é.-m., et donc poser l'éq. (29). L'énergie d'interaction est ainsi nécessairement présente, selon cette théorie, à chaque fois qu'il y a simultanément un champ gravitationnel non constant et de la matière produisant du rayonnement é.-m. [a7]. Or ceci est évidemment la situation générale. De plus l'énergie d'interaction, comme le champ scalaire p qui la détermine par l'éq. (37), est alors présente essentiellement dans tout l'espace, éq. (46) avec S dépendant de $\partial_T U$ et de son gradient spatial, et du champ é.-m. et de ses dérivées premières. L'énergie d'interaction pourrait donc a priori contribuer à la matière noire, puisque cette énergie est gravitationnellement active, qu'il s'agit d'une forme clairement "exotique" d'énergie, et qu'elle serait présente dans tout l'espace — mais bien sûr, avec une plus grande densité dans les régions où les champs sont plus intenses. Dans le but de déterminer si la distribution spatiale de cette énergie a quelque chose à voir avec les "halos sombres" de matière noire que l'on postule pour expliquer les vitesses de rotation des étoiles déduites des observations, j'ai commencé à modéliser le champ é.-m. dans une galaxie (§7). Manifestement, il reste encore du travail avant de pouvoir tirer des conclusions sur la distribution spatiale de cette énergie d'interaction et sur son lien éventuel avec la matière noire.