

Recherches 2010-2014: Equations de Dirac covariantes, référentiels et espaces physiques dans un espace-temps général

Mayeul Arminjon

Laboratoire “Sols, Solides, Structures, Risques”,

UMR 5521 CNRS/ Université Joseph Fourier/ Institut National Polytechnique de Grenoble,

BP 53, F-38041 Grenoble cedex 9, France.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Equations de Dirac dans un espace-temps courbe et leur mécanique quantique | 2 |
| 1.1 | Motivation | 2 |
| 1.2 | Principaux résultats obtenus précédemment | 3 |
| 1.3 | Les deux représentations de la fonction d’ondes de Dirac [a5, b2] | 6 |
| 1.4 | Optique géométrique pour les fermions dans un espace-temps courbe [a6, b3] | 8 |
| 1.5 | Une solution “conservatrice” du problème de non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie [a4, b4] | 9 |
| 1.6 | Une solution simple du problème de non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie [a7, b4] | 10 |
| 1.7 | Couplage spin-rotation pour une particule de Dirac [a9] | 12 |
| 1.8 | Une discussion sur la non-unicité de H et de E [a8] | 14 |
| 1.9 | Compléments sur le problème de non-unicité [a10, b6] | 16 |
| 2 | Référentiels généraux et leurs variétés “espace” | 19 |
| 2.1 | Motivation | 19 |
| 2.2 | Le cas local [a3, i1, b5] | 20 |
| 2.3 | Le cas global [a11, i1, b5] | 22 |
| 2.3.1 | Le problème de l’existence locale de cartes v -adaptées | 22 |
| 2.3.2 | Un argument de transversalité | 24 |
| 2.3.3 | Les cartes v -adaptées conduisent à un atlas canonique sur N_v | 25 |
| 2.3.4 | L’espace local M_F est un ouvert de l’espace global N_v | 26 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Publications depuis 2010 | 27 |
| 3.1 | Revue avec comité de lecture | 27 |
| 3.1.1 | Revue avec comité de lecture : articles parus de 2010 à 2014 | 27 |
| 3.1.2 | Revue avec comité de lecture : articles à paraître ou soumis | 27 |
| 3.2 | Actes de conférences invitées dans des colloques avec comité de lecture | 28 |
| 3.3 | Actes de colloques avec comité de lecture | 28 |
| 3.4 | Séminaires, workshops | 29 |
| 4 | Objectifs / Projet de recherche | 29 |
| 4.1 | Statut des équations “à une particule”, source du champ gravitationnel, et théorie des champs en espace-temps courbe | 29 |
| 4.2 | Théories de la gravitation avec un référentiel privilégié | 30 |

1 Equations de Dirac dans un espace-temps courbe et leur mécanique quantique

1.1 Motivation

Les expériences de mécanique quantique dans un champ de gravitation sont assez nombreuses et permettent de vérifier le comportement quantique des particules subatomiques et des atomes dans le champ de gravitation (jusqu’ici celui de la Terre) : en plus des expériences d’interférométrie neutronique (Colella-Overhauser-Werner, années 70) et atomique (Kasevich-Chu, Riehle-Bordé et al., années 90), il y a maintenant les mesures de la transmission de neutrons ultrafroids par une fente horizontale, initiées à l’Institut Laue-Langevin (Grenoble), et qui permettent de vérifier la quantification de l’énergie de ces neutrons dans le champ de pesanteur terrestre. A ma connaissance, les effets confirmés par cet ensemble d’expériences sont les seuls effets du couplage général entre la théorie quantique et la gravitation qui aient été *mesurés*. Il est frappant de constater que l’interprétation de toutes les expériences déjà réalisées est faite dans le cadre de l’équation de Schrödinger non-relativiste. Certes, les atomes ou les neutrons utilisés sont nettement non-relativistes, tant par leur énergie cinétique que par leur énergie potentielle newtonienne, comparées à leur énergie de masse au repos. Il est donc clair que l’emploi de cette équation était justifié. Néanmoins, la gravitation est maintenant décrite dans le cadre de théories relativistes avec un espace-temps courbe, ce qui conduit à formuler des équations d’ondes généralisées.

Ainsi, pour les particules de spin $1/2$ qui, en négligeant la gravitation, sont gouvernées par l’équation de Dirac originelle, on peut utiliser la généralisation standard de cette équation à un espace-temps courbe, proposée par Fock et par Weyl : ci-après l’équation *DFW*. Il semble souhaitable de déterminer les prédictions faites par l’équation *DFW* pour ces expériences, d’abord pour vérifier que l’écart avec la

théorie non-relativiste est encore négligeable aux précisions atteintes actuellement — et surtout pour se préparer au moment où ce ne sera plus le cas, qui ouvrira la possibilité d’un test direct de la façon dont nous concevons le couplage entre gravitation et théorie quantique. Il existe une littérature assez fournie sur l’équation DFW et ses applications à diverses situations physiquement intéressantes, par exemple dans un système de coordonnées en rotation et/ou en accélération uniforme dans l’espace-temps de Minkowski, ou dans un champ de gravitation faible, statique ou stationnaire. Pourtant, une comparaison précise avec les prédictions de l’équation de Schrödinger non-relativiste dans le potentiel newtonien n’avait pas été faite à ma connaissance. De plus, la littérature existante semblait peu claire sur certains points importants, comme la signification physique du système de coordonnées, ou comme l’influence éventuelle du choix très large du champ de tétrades qui détermine le champ de matrices de Dirac γ^μ (i.e. le coefficient de l’équation DFW). Varjú & Ryder [Phys. Rev. D **62**, 024016 (2000)] remarquaient qu’“il y a malheureusement un certain désaccord entre les différents papiers”. Enfin, j’avais pu antérieurement appliquer la “correspondance classique-quantique” pour obtenir une équation de Klein-Gordon dans un espace-temps statique [B15]. Il était tentant de prolonger ce travail à l’équation de Dirac, pour voir si l’équation DFW était sa seule généralisation raisonnable.

1.2 Principaux résultats obtenus précédemment

Equation de Dirac alternative dans un espace-temps courbe [A37], [A39]. J’ai montré qu’en partant du hamiltonien classique d’une particule relativiste dans l’espace-temps plat de Minkowski ou dans un espace-temps statique [A37], ou même dans un espace-temps lorentzien général [A39], on peut obtenir directement l’équation de Dirac par une correspondance classique-quantique. L’équation obtenue ainsi a exactement la même forme que l’équation standard (DFW) :

$$\gamma^\mu D_\mu \Psi = -iM\Psi \quad (M \equiv mc/\hbar), \quad (1)$$

où γ^μ est le champ de matrices de Dirac (matrices complexes 4×4), mais la fonction d’ondes de Dirac Ψ se transforme comme un 4-vecteur et non comme un “bispineur”. (Simultanément, on doit alors transformer le quadruplet de matrices de Dirac comme un tenseur (2 1).) De plus cette équation de Dirac dépend d’une connexion D , en fait arbitraire, sur le fibré tangent à la variété espace-temps. (D_μ est la dérivée covariante correspondante.) Pour le choix le plus naturel qui est la connexion de Levi-Civita, l’équation obéit au principe d’équivalence dans un sens plus fort que l’équation DFW [A39].

Mécanique quantique de l’équation DFW dans une métrique statique ou stationnaire [A38], [A41]. J’ai étudié, dans le cas d’une métrique statique : le hamiltonien de l’équation DFW ; le produit scalaire associé ; et la correction qu’elle apporte,

pour un champ de gravitation faible, à l'équation de Schrödinger non-relativiste dans le potentiel newtonien [A38]. J'ai aussi considéré le cas d'une rotation uniforme surimposée à un champ statique faible et j'ai calculé l'effet principal de cette rotation sur les niveaux d'énergie stationnaires [A41].

Mécanique quantique de l'équation de Dirac dans un espace-temps plat [A40]. Avec F. Reifler, nous avons montré que la mécanique quantique associée à l'équation de Dirac dans un référentiel inertiel de l'espace-temps plat de Minkowski est la même, que l'on considère la fonction d'ondes de Dirac comme un bispineur, comme un 4-scalaire, ou comme un 4-vecteur. *La transformation spinorielle n'est donc pas nécessaire*, au moins en ce qui concerne la mécanique quantique de l'équation de Dirac [A39],[A40].

Mécanique quantique de l'équation DFW et de l'équation alternative dans une métrique générale [a1]. Nous avons notamment étudié, dans une métrique complètement générale, et simultanément pour l'équation DFW et pour l'équation alternative [lorsque celle-ci a exactement la même forme (1) que l'équation DFW]: l'opérateur hamiltonien H , qui engendre l'évolution temporelle; le produit scalaire pertinent; l'hermiticité de H pour ce produit scalaire. Dans ce travail, et dans les suivants, nous avons attaché une attention particulière au fait que, pour l'équation de Dirac dans un espace-temps lorentzien général, les matrices de Dirac γ^μ dépendent du point X de l'espace-temps V et forment donc un "champ γ " pour lequel il existe un vaste continuum de choix admissibles. Nous avons trouvé que l'opérateur H dépend du système de coordonnées: $X \mapsto (x^\mu)$ seulement par la classe d'équivalence modulo les changements de coordonnées purement spatiaux; que le produit scalaire pertinent pour un champ γ général s'obtient en remplaçant dans l'expression standard de ce produit scalaire la matrice de Dirac constante $\gamma^{\#0}$ par la matrice hermitisante $A(X)$:

$$(\Psi | \Phi) \equiv \int (\Psi : \Phi) dV = \int \Psi^\dagger A \gamma^0 \Phi \sqrt{-g} d^3 \mathbf{x}, \quad dV \equiv \sqrt{-g} d^3 \mathbf{x}; \quad (2)$$

et que *l'hermiticité de H pour ce produit scalaire dépend du choix admissible pour le champ γ* . (Ce résultat s'applique aussi à la situation standard où la matrice hermitisante est la matrice constante $\gamma^{\#0}$.)

Non-unicité des opérateurs hamiltonien et "énergie", et du spectre énergétique [a2]. L'instabilité de l'hermiticité de H notée ci-dessus indiquait la présence d'un problème de non-unicité dans la théorie de l'équation de Dirac généralement-covariante. Nous avons alors étudié ce problème en détail. Nous avons pu, là encore, faire cette étude à la fois pour l'équation DFW et pour l'équation alternative. Dans le cas général, celle-ci contient un terme additionnel par rapport à

l'équation DFW: ¹

$$\gamma^\mu D_\mu \Psi = -iM\Psi - \frac{1}{2}A^{-1}(D_\mu(A\gamma^\mu))\Psi. \quad (3)$$

On trouve que le produit scalaire pertinent est le même (2) que pour l'équation de Dirac “normale” (1). Deux champs γ^μ admissibles s'échangent par un champ de transformations de similarité, caractérisé par un champ de matrices 4×4 inversibles complexes $X \mapsto S(X)$. C'est un cas de “transformation de jauge locale”. Une telle transformation agit donc sur la matrice γ^0 intervenant dans la définition (2) du produit scalaire, ainsi que sur la matrice A . Elle agit aussi sur l'expression Ψ de la fonction d'ondes. Il se trouve qu'avec toutes ces transformations le produit scalaire de deux fonctions d'ondes quelconques (2) est conservé. Autrement dit, une transformation de jauge définit une isométrie (linéaire), ou transformation unitaire, de l'espace de Hilbert de départ sur celui d'arrivée. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que les opérateurs hamiltoniens H et \tilde{H} , avant et après application de la transformation, soient physiquement équivalents, est que l'on ait

$$\tilde{H} = S^{-1} H S. \quad (4)$$

Nous avons obtenu dans chaque cas (DFW et équation alternative) la condition caractéristique sur la transformation de jauge locale $X \mapsto S(X)$ pour qu'il en soit ainsi. Par exemple, pour l'équation DFW, c'est simplement le fait que la transformation S soit indépendante de la coordonnée de temps $t \equiv x^0/c$ [a2] :

$$\partial_0 S = 0 \quad (\text{DFW}). \quad (5)$$

Ceci peut se voir plus rapidement [a4] en utilisant le fait que l'équation DFW est covariante par les transformations de jauge admissibles pour cette équation — qui sont les transformations différentiables $X \mapsto S(X) \in \text{Spin}(1, 3)$. ² Mais rien dans la théorie existante n'impose que la condition (5) soit vérifiée. Au contraire, comme la métrique et donc le champ de tétrades dépendent généralement de t , deux choix admissibles du champ de tétrades sont reliés par une transformation de Lorentz locale L qui dépend généralement de t . Il en résulte que les champs γ^μ correspondants sont reliés par une transformation de jauge admissible S qui, elle aussi, dépend généralement de t . Ainsi, *le hamiltonien de DFW n'est pas unique*

¹ Cette équation est obtenue comme équation d'Euler-Lagrange du lagrangien. Celui-ci généralise le lagrangien standard en remplaçant $\gamma^{\#0}$ par $A(X)$. Le terme $D_\mu(A\gamma^\mu)$ s'annule pour DFW.

² Au passage, mentionnons explicitement ceci (qui a été rappelé clairement dès le premier papier sur le problème de non-unicité de H et E [a2], et d'une façon un peu moins visible dans mon rapport d'activité de 2010 — mais n'a pas été redit dans celui de 2012) : cette covariance signifie bien sûr que *l'équation DFW est unique* [localement dans un espace-temps donné (V, \mathbf{g})], au sens que les différents choix admissibles des champs de coefficients intervenant dans l'équation conduisent à des équations équivalentes.

dans un système de coordonnées donné. Il en est de même pour le hamiltonien de l'équation alternative.

Toutefois, le hamiltonien n'étant pas hermitien en général [a1], on est amené à considérer sa partie hermitienne pour le produit scalaire (2) :

$$E = H^s \equiv \frac{1}{2}(H + H^\dagger). \quad (6)$$

La valeur moyenne de cet opérateur E est l'énergie E du champ définie à partir du tenseur d'énergie-impulsion *canonique* t^μ_ν [a2, a7] :

$$\langle E \rangle \equiv (\Psi | E \Psi) \equiv \int \Psi^\dagger A \gamma^0 (E \Psi) \sqrt{-g} \, d^3 \mathbf{x} = E \equiv \int t^0_0 \sqrt{-g} \, d^3 \mathbf{x}, \quad (7)$$

comme l'avait montré Leclerc [Class. Quant. Grav. **23**, 4013 (2006)] dans un cas moins général. Il est donc légitime d'appeler E l'opérateur énergie. De même que pour l'opérateur hamiltonien, nous avons prouvé [a2] que *l'opérateur E , et même son spectre, donc le spectre énergétique d'une particule obéissant à l'équation de Dirac généralement-covariante, ne sont pas uniques.*

1.3 Les deux représentations de la fonction d'ondes de Dirac [a5, b2]

Pour l'équation DFW, il est connu que la fonction d'ondes Ψ se transforme comme un scalaire lors d'un changement de carte. Pour l'équation alternative que j'avais proposée, Ψ se transforme comme un 4-vecteur. L'existence de ces deux modes de transformation nous a conduits à étudier, pour chacun d'eux, la définition géométrique des objets pertinents : la fonction d'ondes, le champ γ , la matrice hermitisante, en utilisant des éléments de la théorie des fibrés vectoriels. Supposons à l'avance qu'il existe une définition "intrinsèque" de la fonction d'ondes de Dirac, comme une section ψ d'un certain fibré vectoriel E , que nous appelons "fibré spinoriel". Supposant donc E donné, il n'est pas difficile de trouver les définitions intrinsèques du champ γ et du champ \mathcal{A} de la matrice (ou métrique) hermitisante, comme étant des sections des produits tensoriels de fibrés $TV \otimes E \otimes E^\circ$ et $(E^\circ)^* \otimes E^\circ$, respectivement — où TV est le fibré tangent à la variété espace-temps V , E° est le fibré vectoriel dual de E , et $(E^\circ)^* = (E^*)^\circ$ est le fibré vectoriel conjugué de E° . Nous avons explicitement relié ces définitions aux *expressions locales* que sont Ψ , γ^μ et A . Ceci nous a permis de relier l'écriture intrinsèque de l'équation de Dirac à son expression locale, qui n'est autre que l'écriture usuelle (1).

En ce qui concerne la définition du "fibré spinoriel" E lui-même : un résultat de Geroch, bien connu dans la littérature mathématique sur l'équation de Dirac, dit que *si l'espace-temps est de dimension 4 et non-compact (ces deux propriétés étant conformes à l'idée que l'on se fait généralement de l'espace-temps) et de plus*

admet une “structure spinorielle” permettant une construction (très abstraite et complexe) du fibré des spineurs, *alors* il existe un champ (régulier) de tétrades orthonormales. Pour cette raison, Penrose & Rindler (Spinors and Space-time, C.U.P., 1986) considèrent qu’un espace-temps “physiquement pertinent” admet un champ de tétrades orthonormales. Nous avons prouvé que cette dernière hypothèse suffit à assurer que chacun des deux fibrés vectoriels *très simples* suivants :

- ▶ le fibré trivial $V \times \mathbb{C}^4$;
- ▶ le fibré tangent complexifié $T_{\mathbb{C}}V$,

est un fibré spinoriel au sens de Trautman [J. Geom. Phys. **58**, 238- (2008)] — i.e., en gros, il existe un champ global γ tel qu’une forme intrinsèque de la relation d’anticommutation usuelle soit vérifiée, ce qui permet donc de définir localement des champs γ^μ se recoupant correctement dans des ouverts qui s’intersectent.

L’existence de ces deux réalisations explicites très simples d’un “fibré spinoriel” nous permet de définir deux classes principales d’équations de Dirac : les équations QRD (pour “Quadruplet Representation of the Dirac” wave function), pour lesquelles $E = V \times \mathbb{C}^4$, donc ψ est un champ de quadruplets de complexes (ou 4-scalaires) ; et les équations TRD (pour “Tensor Representation of the Dirac” wave function), pour lesquelles $E = T_{\mathbb{C}}V$, donc ψ est un champ de 4-vecteurs complexes. *L’équation DFW est une équation QRD particulière, pour laquelle la connexion D sur $E = V \times \mathbb{C}^4$ dépend du champ γ (ou, de manière équivalente, du champ de tétrades) de telle façon que $D\gamma = 0$. Pour l’équation alternative que j’avais proposée antérieurement [A39], la connexion est au contraire une connexion fixée D sur $E = T_{\mathbb{C}}V$, i.e. D ne change pas sous l’action d’une transformation de jauge locale. J’avais alors proposé deux choix pour la connexion sur $T_{\mathbb{C}}V$: la connexion de Levi-Civita et une connexion dépendant d’un référentiel privilégié. D’autres choix “naturels” peuvent être proposés, mais le point important est qu’on peut écrire une équation de Dirac dès qu’on a une connexion D sur $T_{\mathbb{C}}V$, ou encore sur $V \times \mathbb{C}^4$. (Toutefois, avec une connexion fixée, les transformations de jauge qui laissent l’équation de Dirac covariante ne sont pas connues à l’avance, mais dépendent du champ γ initial par l’intermédiaire d’une EDP [a1, a2].)*

Il devenait important d’étudier les relations entre les différentes équations de Dirac possibles. Nous avons d’abord prouvé **(1)** que toute équation QRD est équivalente à une équation TRD, essentiellement en passant du champ de bases canonique sur $V \times \mathbb{C}^4$ à un champ de bases global arbitraire sur $T_{\mathbb{C}}V$ et en transportant tous les objets à l’aide de cette transformation. *Il n’y a donc pas de différence essentielle entre les deux représentations, 4-scalaire ou 4-vecteur, de la fonction d’ondes de Dirac.* Nous avons ensuite étudié la relation entre les équations de Dirac correspondant à deux connexions différentes D et D' sur le même fibré spinoriel, $E = V \times \mathbb{C}^4$ ou $E = T_{\mathbb{C}}V$. Nous avons prouvé **(2)** que pour tout choix du champ γ , l’équation de Dirac obtenue avec ce champ γ et la connexion D est équivalente (non seulement localement mais même sur un domaine

assez “grand”) à l’équation de Dirac obtenue avec la connexion D' et un certain autre champ $\tilde{\gamma}$. La démonstration de ce résultat utilise un théorème de Lax sur les systèmes hyperboliques symétriques. *N’importe quel choix de la connexion contient donc toute la variété possible des équations de Dirac* sur un des deux fibrés spinoriels disponibles, et même [en vertu de (1)] sur les deux. En particulier, on peut proposer le choix très simple de la connexion “triviale” sur $E = V \times \mathbb{C}^4$: celle dont les matrices sont *nulles* dans le champ de bases canonique sur ce fibré trivial. Nous notons QRD–0 l’équation QRD obtenue ainsi.

1.4 Optique géométrique pour les fermions dans un espace-temps courbe [a6, b3]

En considérant une “limite semi-classique” appropriée, les solutions d’une équation d’ondes quantique telle que l’équation de Dirac dans un espace-temps courbe doivent permettre de retrouver des trajectoires de particules classiques dans ce même espace-temps. Il existe un certain nombre de travaux sur la question. Toutefois, le sens physique des approximations faites et des définitions permettant d’associer des trajectoires classiques à certaines solutions de l’équation de Dirac ne semble pas complètement clair. Ainsi, dans l’approximation WKB, on fait tendre \hbar vers zéro. Le sens physique de cette limite n’est pas immédiat, puisque \hbar est une constante (dépendant des unités). Dans le travail d’Audretsch [J. Phys. A: Math. Gen. **14**, 411 (1981)] basé sur l’approximation WKB pour une particule libre (comme la plupart de ces travaux), les trajectoires “vraiment classiques”, i.e. les géodésiques, sont obtenues à l’ordre zéro en \hbar . A cet ordre, les matrices Γ_μ de la connexion de spin n’interviennent pas, comme si à cet ordre d’approximation l’espace-temps était assimilable à un espace-temps plat, alors que la connexion de Levi-Civita intervient bien sûr dans l’équation des géodésiques.

Nous avons appliqué [a6] à l’équation de Dirac, dans un espace-temps courbe et en présence d’un champ électromagnétique général, une approximation d’optique géométrique proposée dans un contexte différent par Whitham. Cette approximation consiste simplement à négliger dans le lagrangien la variation de l’amplitude χ de la fonction d’ondes $\Psi = \chi e^{i\theta}$ devant la variation de la phase (réelle) θ , i.e. à admettre que

$$\partial_\mu \chi \ll (\partial_\mu \theta) \chi. \quad (8)$$

Avant de la mettre en œuvre, nous démontrons que toute équation de Dirac générale (3), basée sur un champ γ et une connexion D quelconque, est équivalente localement à une équation de Dirac *normale* (1) pour la connexion triviale QRD–0, i.e. à une équation de la forme

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = -\frac{imc}{\hbar} \Psi. \quad (9)$$

Ceci est obtenu notamment en annulant au moyen d’une transformation de jauge la matrice $\Gamma \equiv \gamma^\mu \Gamma_\mu$, qui contient tout l’effet des matrices Γ_μ de la connexion

(générale) D sur l'équation de Dirac. Nous ne faisons donc aucune approximation en écrivant le lagrangien avec $\Gamma = 0$. L'utilisation de l'approximation de Whitham (8) nous donne alors un nouveau lagrangien. Nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange correspondantes. Après un changement de variables suggéré par les *relations de Broglie*, nous avons un champ de 4-vitesse u^μ et une densité de probabilité J . Les trajectoires du champ u^μ vérifient exactement les équations du mouvement d'une particule classique dans le champ électromagnétique. Le courant $J u^\mu$ vérifie exactement l'équation de conservation d'un courant [a6].

Inversement, on peut partir du hamiltonien d'une particule classique et, appliquant la correspondance classique-quantique, obtenir l'équation de Dirac : je l'avais fait pour une particule soumise au champ électromagnétique dans l'espace-temps de Minkowski, *ou* pour une particule libre dans un espace-temps courbe. Nous avons généralisé ces résultats à une particule soumise au champ électromagnétique *et* dans un espace-temps courbe [b3]. Nous avons d'abord défini un hamiltonien classique pour cette situation, en utilisant les résultats d'O. D. Johns (Oxford Un. Press, 2005) sur les lagrangiens et hamiltoniens "traditionnels" (3-D) et "étendus" (4-D). Nous définissons aussi à partir du lagrangien "étendu" un 4-covecteur "impulsion canonique" P_μ . La correspondance classique-quantique consiste dans un premier temps à *postuler* les relations de Broglie sous la forme

$$P_\mu = \hbar K_\mu, \quad (10)$$

où $K_\mu \equiv \partial_\mu \theta$ est le covecteur d'ondes. On obtient alors [b3] l'équation de Dirac par le même procédé que précédemment [A37], [A39].

Revenant à l'approximation de l'optique géométrique pour l'équation de Dirac, on *déduit* cette fois [b3] les relations de Broglie (10) des relations exprimant le changement de variables utilisé pour trouver des trajectoires classiques.

1.5 Une solution "conservatrice" du problème de non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie [a4, b4]

La non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie, prouvée précédemment [a2], signifie manifestement que, dans les équations de Dirac généralement-covariantes, le choix de "jauge" (en l'occurrence, le choix du champ de matrices de Dirac γ^μ) est trop large pour qu'on ait l'unicité de ces opérateurs (et celle du spectre énergétique). Pour obtenir cette unicité, il semble donc qu'il faille restreindre les possibilités de choix du champ γ^μ (ou, de manière équivalente pour DFW, du champ de tétrades), d'une façon cohérente et suffisante. Ce n'est pas une tâche facile. (En témoignent les tentatives de Gorbatenko & Neznamov, analysées plus bas.)

Une première méthode de résolution de ce problème peut être proposée de la façon suivante. Le hamiltonien et l'opérateur énergie sont définis dans un référentiel donné [a1] — cette dernière notion étant définie comme une classe

d'équivalence de cartes [a3]. Je montre que la donnée d'un référentiel F , en ce sens précis, fixe un champ de 4-vitesse unique v_F , et fixe aussi un champ unique de vitesse de rotation Ω_F , à peu près comme l'ont défini Weysenhoff et Cattaneo. Il est naturel d'imposer au champ de tétrades (u_α) ($\alpha = 0, \dots, 3$) la condition que le vecteur du genre temps de la tétrade soit la 4-vitesse du référentiel F : $u_0 = v_F$. Je définis géométriquement le champ de vitesse de rotation Ξ de la triade spatiale (u_p) comme un champ tensoriel sur la variété "espace" M munie d'une métrique riemannienne qui dépend du temps. Je prouve que tous les champs de tétrades (u_α) qui ont le même vecteur du genre temps u_0 , et pour lesquels le champ Ξ est le même, donnent lieu à des opérateurs hamiltonien et énergie équivalents. Deux façons naturelles de fixer le champ Ξ sont : a) $\Xi = \Omega_F$, et b) $\Xi = \mathbf{0}$. Chacun de ces deux choix fournit donc une solution au problème de non-unicité. Je prouve que ces deux solutions ne sont pas équivalentes. Il est plausible que la première, mais pas la deuxième, conduise à un "couplage spin-rotation" tel que l'a prédit Mashhoon. De plus, ces deux solutions ne sont pas aisées à mettre en œuvre. Enfin, au moins à cause de la condition $u_0 = v_F$, elles ne sont valables que pour un référentiel F donné.

1.6 Une solution simple du problème de non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie [a7, b4]

L'équation de Dirac originelle, celle proposée par Dirac, n'est valable qu'en relativité restreinte : en coordonnées cartésiennes dans l'espace-temps de Minkowski. Dans cette équation, les matrices de Dirac γ^μ sont constantes. Dans ce cas, l'opérateur hamiltonien H est hermitien et donc coïncide avec l'opérateur énergie E , éq. (6). Deux choix possibles pour les matrices γ^μ s'échangent par une transformation de jauge (une transformation de similarité des γ^μ) *constante*. L'opérateur H est invariant sous ces transformations de jauge "globales" [A40]. De même, pour l'équation DFW, une transformation de jauge constante ($\partial_\mu S = 0$) vérifie la condition (5) d'invariance du hamiltonien dans tout système de coordonnées et conduit donc à un opérateur \tilde{H} équivalent à celui de départ H . Ceci est vrai aussi pour l'opérateur E . Cette invariance de H et E sous les transformations de jauge constantes est vraie aussi pour l'équation QRD-0, mais elle ne l'est plus si l'on fait un autre choix de connexion. Est-il possible de restreindre le choix du champ γ^μ à une classe telle que deux choix quelconques dans celle-ci s'échangent par une similarité constante S ? En définissant le champ γ^μ par un champ de tétrades orthonormales, ceci équivaut à demander que deux champs de tétrades possibles s'échangent par une transformation de Lorentz constante.

Pour éclairer cette question, j'ai étudié un procédé général pour définir un champ de tétrades orthonormales dans une carte (système de coordonnées) quelconque, dans laquelle la métrique est connue par sa matrice 4×4 , $G \equiv (g_{\mu\nu})$. Ce procédé consiste, utilisant une suggestion de F. Reifler, à calculer la décomposition

de Cholesky (généralisée) de G , qui est unique. J'en déduis une tétrade unique, définie par sa matrice dans la carte considérée. (Pour une métrique diagonale quelconque, ce procédé se confond avec le choix classique de la "tétrade diagonale".) Je montre néanmoins qu'en général ce procédé laisse entier le problème de non-unicité. La raison en est que deux choix possibles de la carte à l'intérieur d'un même référentiel (ce dernier étant donné physiquement, et non la carte) conduisent par ce procédé à deux tétrades différentes qui s'échangent par une transformation de Lorentz dépendant, en général, du temps $t = x^0$.

Cependant, on voit aussi que la transformation de Lorentz pourrait ne pas dépendre du temps, à la condition que la métrique ait (dans une certaine carte) la forme "diagonale spatialement isotrope" suivante :

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(f, -h, -h, -h), \quad f > 0, \quad h > 0. \quad (11)$$

Je prouve ensuite que s'il en est ainsi, alors, pour tout couple de choix possibles de la carte dans laquelle la métrique a la forme (11), les deux "tétrades diagonales" obtenues sont reliées par une transformation de Lorentz constante. (La démonstration utilise un résultat de la théorie mathématique des milieux continus en grandes déformations.) Il en résulte que ce procédé conduit, dans *tout* système de coordonnées, et par suite dans tout référentiel, à un opérateur H unique et un opérateur énergie unique. Le problème de non-unicité est donc résolu indépendamment du référentiel, et d'une façon praticable. Je montre aussi que la forme (11) est suffisamment générale pour les tests expérimentaux prévisibles. La forme (11) de la métrique ne peut être valable que dans un référentiel privilégié. Il se trouve que (11) est à peine plus générale que la forme postulée de la métrique dans le référentiel privilégié, dans la théorie scalaire de la gravitation que j'ai proposée antérieurement [A35]. J'y arrive ici — et plus généralement, j'arrive à l'existence d'un référentiel privilégié — par une voie entièrement différente.

Dans ce même travail [a7], j'indique pourquoi il ne me semble guère probable qu'il existe une telle résolution du problème de non-unicité indépendamment du référentiel pour une forme plus générale de la métrique. Je montre aussi que le postulat d'existence d'une carte dans laquelle la métrique a une forme imposée [quelle qu'elle soit, donc en particulier la forme (11)] est invariant par difféomorphisme (isométrie). Enfin, je justifie ma restriction à la "première quantification" : i) aux énergies faibles (qui sont pertinentes pour les expériences de mécanique quantique dans le champ de gravitation et aussi pour la théorie des atomes du type hydrogène), on peut ignorer les états d'énergie négative, donc l'équation de Dirac fait sens. ii) L'équation (7) indique que c'est le tenseur énergie-impulsion canonique $t^\mu{}_\nu$ qui est pertinent, et donc que le tenseur énergie-impulsion "quantique" (l'opérateur correspondant à $t^\mu{}_\nu$ en théorie du champ quantique) devrait être obtenu en "quantifiant" $t^\mu{}_\nu$. Mais (7) montre aussi que la non-unicité de l'opérateur énergie E due à l'influence du choix de jauge se propage à $t^\mu{}_\nu$. La version quantique de ce dernier devrait donc elle aussi être non-unique. iii)

Indépendamment de la question du choix de jauge, les développements rigoureux en théorie quantique du champ de Dirac dans un espace-temps courbe ne semblent pas encore avoir abouti à une théorie permettant de faire des prédictions univoques des effets de mécanique quantique dans le champ de gravitation.

1.7 Couplage spin-rotation pour une particule de Dirac [a9]

Dans un référentiel F en rotation uniforme par rapport à un référentiel inertiel F' , le moment cinétique orbital \mathbf{L} d'une particule se trouve couplé à la rotation du référentiel, au sens que le hamiltonien diffère de son expression dans F' par un terme additionnel $-\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$, où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse de rotation constante de F par rapport à F' . Par conséquent, si quelqu'un considère que le spin d'une particule quantique exprime une sorte de rotation interne, il sera conduit à conjecturer que le spin aussi devrait être couplé à la (vitesse de) rotation $\boldsymbol{\omega}$. C'est ainsi que Mashhoon [Phys. Rev. Lett. **61**, 2639 (1988)] a argué que, dans le référentiel tournant F , le “terme de couplage spin-rotation”

$$\delta H_{\text{SR}} = -\gamma_L \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} \quad (12)$$

devrait être ajouté au hamiltonien d'une particule quantique relativiste, par rapport au hamiltonien dans F' . (Ici γ_L est le facteur de Lorentz correspondant à la vitesse par rapport à F' de l'observateur local lié à F , et $\mathbf{S} \equiv \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}$, où $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma^j)$, les σ^j ($j = 1, 2, 3$) étant les matrices de Pauli.) Son raisonnement était plutôt heuristique. Peu après, Hehl & Ni [Phys. Rev. D **42**, 2045 (1990)] ont obtenu un terme similaire en partant de l'équation de Dirac covariante (l'équation DFW), et en choisissant pour l'écrire un champ de tétrades particulier, “qui se comporte comme un référentiel tournant transporté à la Fermi-Walker”. Mais plus récemment, Ryder a observé [Gen. Rel. Grav. **40**, 1111 (2008)] que le terme de couplage spin-rotation peut être présent ou absent, selon le champ de tétrades choisi. Ceci est évidemment à rapprocher de la dépendance générale de l'opérateur hamiltonien associé à l'équation DFW par rapport au champ de tétrades, que nous avons trouvée. Par ailleurs, les calculs ne sont pas très explicites dans ces deux articles.

Il était donc intéressant de faire des calculs détaillés et systématiques du hamiltonien de DFW dans l'espace-temps de Minkowski, en considérant différents choix de tétrades — et en comparant les résultats pour le référentiel tournant F et le référentiel inertiel F' . Trois champs de tétrades ont été choisis pour représenter les deux cadres de résolution du problème de non-unicité du hamiltonien — le cadre “conservateur” et le cadre plus radical mais plus simple, décrits aux sections 1.5 et 1.6 respectivement :

- ▶ La tétrade “cartésienne” ou “inertielle” (u'_α), i.e., simplement la base naturelle (∂'_μ) du système de coordonnées cartésien (x'^μ) = (ct', x', y', z') choisi

pour définir F' :

$$u'_\alpha = \delta_\alpha^\mu \partial'_\mu. \quad (13)$$

- ▶ Une tétrade (u_α°) adaptée au référentiel tournant F est obtenue en partant de la base naturelle (∂_μ°) du système de coordonnées cylindriques associé aux coordonnées tournantes (x^μ) , et en projetant les vecteurs ∂_j° sur l'hyperplan orthogonal à ∂_0 , le vecteur tangent aux lignes du temps des x^μ — voir les éqs. (43)–(44) dans [a9].³ Le tenseur spatial “vitesse de rotation” Ξ de la triade adaptée (u_α°) [a4] est égal, à $O(V^2/c^2)$ près, au tenseur vitesse de rotation Ω_F du référentiel tournant F . (Ici, $V \equiv \omega\rho \ll c$ est la vitesse linéaire par rapport à F' de l'observateur local lié à F .) Par conséquent, la tétrade (u_α°) convient pour la variante (a) de la solution “conservatrice” du problème de non-unicité, sect. 1.5.
- ▶ La tétrade tournante considérée par Ryder, exprimée dans les coordonnées tournantes $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ liées à F :

$$t = t', \quad x = x' \cos \omega t + y' \sin \omega t, \quad y = -x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \quad z = z'. \quad (14)$$

Cette tétrade, définie par Ryder comme :

$$u_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\omega y}{c} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\omega x}{c} \frac{\partial}{\partial y}, \quad u_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad u_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad u_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (15)$$

se trouve être simplement [a4]

$$u_0 = u'_0, \quad u_1 = \cos \omega t \partial'_1 + \sin \omega t \partial'_2, \quad u_2 = -\sin \omega t \partial'_1 + \cos \omega t \partial'_2, \quad u_3 = \partial'_3. \quad (16)$$

Le vecteur du genre temps u_0 suffit à définir une congruence d'observateurs — en l'occurrence des observateurs liés à F' , puisque $u_0 = u'_0$. En ce sens, cette tétrade est “adaptée” au référentiel *inertiel* F' , et non pas au référentiel tournant F . (La rotation de la triade (u_p) , $p = 1, 2, 3$ est surimposée.)

Les résultats sont les suivants: la tétrade tournante de Ryder (u_α) (adaptée à F' et non à F), tout comme la tétrade tournante (u_α°) (adaptée à F), donnent effectivement lieu à la présence du terme de couplage spin-rotation dans le hamiltonien DFW. Mais ce terme est alors présent dans le hamiltonien pour le référentiel inertiel F' , aussi bien que dans le hamiltonien pour le référentiel tournant F ! De plus, chacune des trois tétrades donne un hamiltonien différent, que ce soit dans F' ou dans F . (Dans chacun de ces six cas, le hamiltonien est hermitien, donc coïncide avec l'opérateur énergie.) En particulier, les deux opérateurs énergie dans le référentiel inertiel, obtenus respectivement avec la tétrade cartésienne (u'_α) et avec la tétrade tournante de Ryder (u_α) , sont gravement non-équivalents. La

³ Cette tétrade, dont la définition n'est pas immédiate [a9], est reprise sans explication et sans citation par M. Dvornikov [JHEP **10**, 053 (2014)/arXiv:1408.2735], éq. (3.4).

présence du terme spin-rotation dans le référentiel *inertiel* [avec les deux tétrades tournantes (u_α) et (u_α°)] est choquante. Je prouve même de manière générale que les hamiltoniens DFW dans deux référentiels en rotation l’un par rapport à l’autre, calculés avec la même tétrade, ne diffèrent *que* par le terme de moment cinétique orbital, sans terme de spin.

J’en déduis que si le couplage spin-rotation est un effet physique réel pour une particule de Dirac, cela implique que dans deux référentiels en rotation relative il faut choisir deux tétrades différentes. Ainsi, la tétrade doit être choisie de manière spécifique pour chaque référentiel. Dans ce cas, pour que la vitesse de rotation intervenant dans le terme spin-rotation soit la bonne, il faut imposer que la vitesse de rotation de la triade soit celle du référentiel considéré F : $\Xi = \Omega_F$. Autrement dit, si des expériences indiquaient que le couplage spin-rotation (l’effet Mashhoon) est un effet physique réel (et avec la bonne vitesse de rotation), cela signifierait que la variante (a) de la solution “conservatrice” du problème de non-unicité est la solution pertinente. Dans le cas contraire, la solution la plus naturelle serait la “solution simple” (sect. 1.6), qui en effet ne prédit pas la présence du terme spin-rotation, et qui conduit à postuler un référentiel privilégié.

1.8 Une discussion sur la non-unicité de H et de E [a8]

Dans le preprint arXiv:1301.7599, Gorbatenko & Neznamov ont affirmé “l’absence du problème de non-unicité de la théorie de Dirac dans un espace-temps courbe ou plat”. Pour commencer, ils ont écrit que [ma] “preuve [de l’existence de ce problème] est basée sur la démonstration que la forme des hamiltoniens de Dirac dépend du choix de tétrade.” Ceci n’est pas conforme à la vérité. Il va de soi que la forme explicite du hamiltonien de Dirac H dépend de la tétrade choisie. Il est clair que ceci ne prouve pas la non-unicité de H ni celle de l’opérateur énergie E, qui est la partie hermitienne de H. Mais la preuve de la non-unicité de H et de E que j’ai donnée avec Reifler [a2] consiste au contraire à montrer la non-unicité des produits scalaires du type $(\Psi | H\Phi)$ et $(\Psi | E\Phi)$, qui incluent les *valeurs moyennes* $(\Psi | H\Psi)$ et $(\Psi | E\Psi)$, lesquelles incluent plus particulièrement encore les *valeurs propres* de E — dont nous avons également démontré la non-unicité [a2]. Leurs arguments ne répondent en aucune manière à ces preuves. D’une part, ils se réfèrent à leur algorithme qui fait passer d’un hamiltonien DFW, basé sur une tétrade quelconque, à un hamiltonien hermitien, grâce à la “représentation η ”. D’autre part, ils fournissent une liste d’exemples de métriques et, pour chacune d’entre elles, différents choix de hamiltoniens, qui, selon eux, sont équivalents.

Dans la réponse que je leur ai faite [a8], j’ai commencé par un rappel sur le cadre de cette discussion : dans un espace-temps général, chaque choix du champ de matrices de Dirac γ^μ définit un produit scalaire et un espace de Hilbert uniques. Un deuxième choix $\tilde{\gamma}^\mu$ se déduit du premier par une transformation de similarité $S(X)$, laquelle définit une *transformation unitaire* \mathcal{U} entre les espaces de Hilbert respectifs \mathcal{H} et $\tilde{\mathcal{H}}$. Le changement $\gamma^\mu \leftrightarrow \tilde{\gamma}^\mu$ affecte aussi la définition

des opérateurs usuels: par exemple le hamiltonien H devient \tilde{H} . J’ai montré que, pour que toutes les valeurs moyennes d’un opérateur quelconque noté H (*par exemple* le hamiltonien) soient invariantes par le changement $\gamma^\mu \leftrightarrow \tilde{\gamma}^\mu$, il faut et il suffit que l’on ait (4).⁴ J’ai rappelé la démonstration du fait que, lorsque H est bien l’opérateur hamiltonien, le critère (4) est vérifié seulement dans le cas non-générique (5), d’où la non-unicité du hamiltonien. Je le répète: ni le critère (4), ni cette démonstration, ni celle de la non-unicité du spectre propre de E [a2], ne sont discutés dans le preprint de Gorbatenko et Neznamov ni dans leurs autres articles. J’ai rappelé aussi qu’une résolution du problème nécessite de restreindre le choix de la tétrade (voir l’argument au début du §1.5).

J’ai ensuite complété mon analyse de leur algorithme qui permet d’obtenir un hamiltonien hermitien, analyse déjà assez avancée dans l’article [a4]. Cet algorithme consiste à passer de la tétrade quelconque choisie (u_α) à une “tétrade de Schwinger”, i.e. à une tétrade (\tilde{u}_α) telle que la composante “temps” de chacun des vecteurs “spatiaux” \tilde{u}_p ($p = 1, 2, 3$) soit nulle — dans le système de coordonnées considéré. (Cette notion dépend donc du système de coordonnées ou plus exactement du référentiel [a4].) Ils définissent une transformation de similarité, $T = a^{-1}S$ dans mes notations, où S est la transformation de similarité admissible associée au changement de tétrade $(u_\alpha) \leftrightarrow (\tilde{u}_\alpha)$, et $a = |g g^{00}|^{1/4}$. Leur candidat pour un hamiltonien hermitien unique est le hamiltonien noté H_η , obtenu après cette transformation T . Mais la tétrade de Schwinger est loin d’être unique. Si L est une transformation de Lorentz, la nouvelle tétrade $\check{u}_\beta = L^\alpha{}_\beta \tilde{u}_\alpha$ est encore une tétrade de Schwinger, si et seulement si [a4]

$$L^0{}_p = 0 \quad (p = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Je prouve [a8] que les hamiltoniens hermitiens H_η et $H_{\eta'}$ obtenus par le procédé de Gorbatenko & Neznamov en utilisant respectivement (\tilde{u}_α) et (\check{u}_α) comme tétrade de Schwinger sont équivalents (au sens des valeurs moyennes) ssi la transformation de similarité admissible U , associée à la transformation de Lorentz L , est indépendante de la coordonnée de temps t . Mais comme la condition (17) n’impose nullement que ce soit le cas, H_η et $H_{\eta'}$ ne sont en général *pas* équivalents.

J’ai remarqué que des exemples de hamiltoniens équivalents obtenus (dans le même référentiel) avec des tétrades différentes ne prouvent pas que tous les hamiltoniens (dans le même référentiel) soient équivalents. Puis j’ai répondu à leur commentaire de ma discussion [a9] des hamiltoniens DFW obtenus pour deux référentiels dans l’espace-temps de Minkowski. (Le but de cette discussion est d’étudier le couplage spin-rotation pour une particule de Dirac.) Leur commentaire se limite aux deux tétrades (u'_α) et (u_α) , sur les trois présentées plus haut.

⁴ Dans le travail [a2], nous avons obtenu (4) comme condition caractéristique de l’invariance de tous les produits scalaires $(\Psi | H \Phi)$. Le résultat nouveau [a8] est que l’invariance de toutes les valeurs moyennes $(\Psi | H \Psi)$ entraîne celle de tous ces produits scalaires (même si H n’est pas hermitien). J’ai aussi insisté dans [a8] sur le fait que (4) s’applique à tout opérateur.

J'ai montré que l'analyse faite juste ci-dessus s'applique parfaitement : aussi bien la tétrade cartésienne (u'_α) que la tétrade tournante (u_α) sont des tétrades de Schwinger, à la fois dans le référentiel inertiel F' et dans le référentiel tournant F . La transformation de Lorentz L qui fait passer de (u'_α) à (u_α) dépend du temps, donc les hamiltoniens correspondants dans F' , notés H' et H par Gorbatenko & Neznamov, sont bien non-équivalents — contrairement à ce qu'ils affirment. J'ai même pu calculer explicitement l'écart $A \equiv \langle H \rangle - \langle H' \rangle$ entre les valeurs moyennes de H et H' pour des états correspondants ψ et $\psi' = S\psi$, où S est la transformation de similarité associée à L : A dépend de l'état ψ et, sauf dans le cas très particulier où $\langle \Sigma^3 \rangle = 0$ pour l'état ψ , A est non nul et peut être rendu *arbitrairement grand* en jouant sur la vitesse de rotation ω de la tétrade tournante (u_α) .

Enfin, j'ai répondu à un argument qu'ils m'ont présenté lors d'échanges que nous avons eus par courriel sur la version initiale de ma réponse. A savoir, que l'énergie d'un système quantique n'est définie qu'à une constante près. (Cet argument a aussi été avancé par le referee de l'article [a8].) J'ai pu démontrer [a8] qu'en fait, pour DFW, aucune transformation de similarité admissible ne peut décaler d'une constante non nulle les valeurs moyennes de l'opérateur énergie E . Autrement dit, si après une transformation de similarité admissible S le nouvel opérateur énergie, \tilde{E} , n'est pas équivalent à l'opérateur énergie initial E au sens des valeurs moyennes strictes, alors la différence entre les valeurs moyennes pour des états correspondants Ψ et $\tilde{\Psi}$ *dépend* de l'état Ψ . C'est bien ce qui est observé dans l'exemple précédent.

1.9 Compléments sur le problème de non-unicité [a10, b6]

Dans la littérature récente sur l'équation de Dirac dans un espace-temps courbe (DFW), l'opinion privilégiée semble demeurer que le choix du champ de tétrades n'a aucun effet physique. Il est certes exact que les différents choix du champ de tétrades conduisent (au moins localement) à des expressions équivalentes de cette équation ; cela a été démontré par Fock [J. Phys. Rad. **10**, No. 11, 392 (1929)]. Mais la croyance sur l'absence totale d'effet est en contradiction avec ce qui a été démontré dans les articles [a2, a8, a9] sur la non-unicité de l'opérateur hamiltonien H et ses conséquences. Rappelons que ce qui dépend du choix du champ de tétrades inclut le spectre de l'opérateur énergie E [a2], les valeurs moyennes de H et de E [a8] (voir §1.8), et la présence ou l'absence du terme de couplage spin-rotation [a9] (voir §1.7). Dans l'article [a10], je discute les trois points complémentaires ci-dessous. Les points (1) et (3) concernent la mécanique quantique dans un espace-temps courbe de manière générale, i.e. pas seulement la mécanique quantique de l'équation de Dirac.

1) Je discute la définition précise de l'opérateur hamiltonien dans un espace-temps courbe et j'analyse en détail ce qui se passe en présence d'un choix de jauge (choix qu'on doit faire entre autres pour l'équation de Dirac : DFW et équations alternatives). Je rappelle d'abord que le hamiltonien H est obtenu en réécrivant

comme une équation de Schrödinger *l'expression locale* de l'équation d'ondes considérée, et que par conséquent H dépend de la carte. Toutefois, l'opérateur H n'est pas changé lorsqu'on fait un changement de carte interne à un référentiel donné, éq. (22). Je considère ensuite la situation où l'opérateur différentiel qui définit l'équation d'ondes contient un champ de jauge dont le changement définit, pour chaque valeur de la coordonnée temporelle t , une transformation unitaire \mathcal{U} entre les espaces de Hilbert pertinents avant et après la transformation, soit \mathcal{H} et $\tilde{\mathcal{H}}$. Je montre que, lorsque \mathcal{U} dépend de t , le hamiltonien dans un référentiel donné, en tant qu'opérateur agissant sur l'espace des états, dépend du choix de jauge — même si l'équation d'ondes est covariante par le changement de jauge. Dans ce dernier cas, cette dépendance de H est parfaitement compatible avec le fait que H , considéré comme le générateur de l'évolution temporelle de la fonction d'ondes, se transforme de façon cohérente lors du changement de jauge. On peut même dire que cette cohérence de la transformation de H , jointe à la dépendance du changement de jauge en fonction de t , entraînent nécessairement la non-unicité de l'opérateur H . De plus, la définition de n'importe quel autre opérateur \mathcal{O} de la mécanique quantique (par exemple l'opérateur quantité de mouvement ou un opérateur de spin) doit être reconsidérée en présence d'un choix de jauge, de façon à ce que la condition

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{U}\mathcal{O}\mathcal{U}^{-1} \quad (18)$$

soit vérifiée. En effet, cette condition est nécessaire et suffisante afin que, pour tout état Ψ , les valeurs moyennes de \mathcal{O} et $\tilde{\mathcal{O}}$ pour les états correspondants Ψ et $\tilde{\Psi} \equiv \mathcal{U}\Psi$ soient les mêmes. Je montre que, si la condition (18) est vérifiée pour l'opérateur \mathcal{O} , alors la dérivée temporelle $\frac{d\mathcal{O}}{dt}$ la vérifie aussi. En revanche, si \mathcal{O} ne vérifie pas (18), $\frac{d\mathcal{O}}{dt}$ ne la vérifie pas non plus.

2) Bien qu'un certain nombre de travaux récents continuent à ne pas discuter l'effet physique du choix du champ de tétrades, il y en a un qui semble suggérer qu'en fait ce choix a un effet, mais qu'on peut résoudre ce problème facilement. En effet, Obukhov, Silenko & Teryaev [Phys. Rev. D **88**, 084014 (2013)] écrivent : “La tétrade (co-repère) est naturellement définie à une transformation de Lorentz près, et l'on fixe habituellement cette liberté [de choix] en choisissant une jauge. Nous avons discuté le choix de la jauge de tétrade dans [40] et avons démontré que la jauge de Schwinger est un choix préférable physiquement.” Cela pourrait être interprété comme signifiant qu'en choisissant la “jauge de Schwinger”, i.e. en se restreignant à des tétrades de Schwinger, on élimine toute ambiguïté, et ceci d'une façon satisfaisante “physiquement”. Je montre qu'en réalité les objets quantiques importants de leur article dépendent de la liberté de choix qui demeure dans la jauge de Schwinger — cette liberté de choix étant pleinement présente dans leur travail. Je montre d'abord, en utilisant mon analyse antérieure [a8] de l'algorithme proposé par Gorbatenko & Neznamov, que le hamiltonien hermitien considéré par Obukhov et al. dépend du choix de la tétrade de Schwinger. Au passage, je réponds à la tentative que Gorbatenko & Neznamov ont faite [Ann.

Phys. (Berlin) **526**, 195 (2014)] pour rejeter le résultat de mon calcul explicite de la différence $A \equiv \langle H \rangle - \langle H' \rangle$ ⁵ et j'étends ce calcul explicite à une métrique générale, telle que la considèrent Obukhov et al. Je montre ensuite, en appliquant ce qui est dit à la fin du point (1) ci-dessus, que leur opérateur de spin $\frac{d\mathbf{H}}{dt}$ dépend du choix de la tétrade de Schwinger.

3) Le problème de non-unicité concerne d'abord les valeurs moyennes et le spectre propre de l'opérateur énergie E. Dans le cas général d'un champ de gravitation variable, les valeurs moyennes et les valeurs propres de E évoluent avec le temps et il n'y a pas d'état stationnaire au sens strict. On pourrait alors se demander : ces grandeurs ont-elles encore un sens physique dans ce cas général ? Dans le travail [a10], je rappelle que ce problème de non-unicité se manifeste aussi bien dans le cas d'un référentiel *inertiel* dans l'espace-temps *plat* de Minkowski. Il est clair que la question ci-dessus ne se pose pas dans ce cas très important. Je réponds néanmoins en détail à cette question. Elle est liée à une conception selon laquelle l'énergie n'a un sens que s'il s'agit d'une quantité conservée. Ceci est vrai en physique classique pour l'énergie *totale* de la matière et des champs, au sens qu'en physique newtonienne et en relativité restreinte une loi de conservation locale s'applique à la densité totale d'énergie w et à son flux Φ . Cette loi a la même forme que l'équation de continuité qui exprime la conservation de la masse :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \Phi = 0. \quad (19)$$

Dans cette même physique classique, on modélise parfois une portion de matière comme un point dont la contribution aux champs de force est négligée : c'est le concept de *particule d'épreuve*. Pour commencer, en mécanique newtonienne l'énergie e d'une particule d'épreuve dans un champ de forces dérivant d'un potentiel V est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle, et c'est exactement la valeur de la *fonction de Hamilton* de cette particule. Cette énergie e n'est *pas* conservée dans le cas général où V dépend du temps. De même, l'énergie e d'une particule d'épreuve *dans un espace-temps courbe général* peut être définie de façon unique (dans un référentiel donné), elle coïncide avec la valeur de la fonction de Hamilton de cette particule, et elle dépend du temps [a6, a10]. De plus, e dépend exactement du référentiel au sens compris ici. Or, en mécanique quantique, l'énergie et sa signification sont héritées de la mécanique hamiltonienne classique par le biais de la correspondance

$$e \rightarrow +i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_j \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (20)$$

Cette correspondance fait passer du hamiltonien classique à l'équation de Schrödinger. Elle conduit aussi à interpréter l'opérateur hamiltonien H (ou sa partie her-

⁵ En bref, la valeur moyenne de H pour un état ψ contient bel et bien la "moyenne sur les états de spin" appropriée, que ces deux auteurs disent nécessaire. A savoir, $\langle H \rangle$ contient la moyenne sur les différents états de spin qui sont "mélangés dans ψ ", au sens qu'en général, un état ψ n'a pas une valeur déterminée de l'hélicité.

mitienne si H n'est pas hermitien) comme l'opérateur énergie, dont les valeurs propres sont les valeurs observables de l'énergie du système quantique. Ainsi, l'opérateur énergie E associé (dans un référentiel donné) à une équation d'ondes quantique pour une particule est exactement l'équivalent quantique de l'énergie d'une particule d'épreuve classique. Tout comme celle-ci, il dépend en général du temps et aussi du référentiel. Les valeurs propres de E au temps t sont les valeurs observables à t de l'énergie de la particule quantique dans le référentiel considéré. Le fait que E dépende du temps coordonnée t dans un espace-temps courbe ne justifie pas que E ne soit pas unique pour une valeur donnée de t dans un référentiel donné (comme cela se produit dans le cas de changements de jauge dépendant du temps), parce que l'énergie d'une particule d'épreuve libre dans un espace-temps courbe dépend du temps et *est* unique pour une valeur donnée de t dans un référentiel donné [a10, b6].

2 Référentiels généraux et leurs variétés “espace”

2.1 Motivation

La théorie de la relativité dit que l'espace et le temps se fondent en une seule entité : l'espace-temps. Néanmoins, on ne peut guère se passer en physique de la notion d'un espace tridimensionnel de référence : (i) On a évidemment besoin de définir la position spatiale des appareils de mesure et du système testé ou observé. (ii) En mécanique quantique, l'état d'une particule est une fonction ψ de la position x appartenant à un espace tridimensionnel M (et à valeurs dans \mathbb{C} ou dans un fibré complexe). En pratique, la position spatiale est définie comme le triplet des coordonnées spatiales : $\mathbf{x} \equiv (x^j)_{j=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, obtenu en enlevant la coordonnée temporelle x^0 dans un système de coordonnées sur l'espace-temps. Mais a priori, \mathbf{x} n'a pas de signification géométrique précise dans une théorie partant d'une structure d'espace-temps, puisque l'on peut changer la carte arbitrairement. Notons aussi que définir l'espace M comme une sous-variété tridimensionnelle de la variété espace-temps V peut fonctionner pour imposer une condition initiale à un champ sur V , mais ne permet pas de définir une position spatiale de la façon qui est nécessaire dans les deux exemples ci-dessus : dans ceux-ci, on doit identifier des points de l'espace qui existent au moins pendant un certain intervalle de temps — par exemple pour dire que certains objets gardent une position fixe dans un certain référentiel, ou pour définir les états stationnaires d'un système quantique. Notons enfin que l'espace de référence n'a pas besoin d'être unique et en effet ne l'est pas : dans le cas le plus simple, celui de l'espace-temps de Minkowski, il est naturel d'admettre qu'un référentiel inertiel définit un espace de référence — mais que deux référentiels inertiels différents définissent deux espaces de référence différents, quoiqu'isométriques.

La notion d'espace physique est donc fortement liée à celle de référentiel.

Dans un espace-temps général (V, \mathbf{g}) , une notion pertinente est celle de *fluide de référence*, introduite par Cattaneo [Nuovo Cim. **10**, 318 (1958)]: il part d'un système de coordonnées (x^μ) "admissible" sur V , i.e. vérifiant la condition

$$g_{00} > 0, \quad g_{jk} dx^j dx^k < 0. \quad (21)$$

Il observe que dans ce cas, les lignes d'univers " x^0 variable" [et $\mathbf{x} \equiv (x^j)_{j=1,2,3}$ fixé] peuvent être interprétées comme les trajectoires d'un réseau tridimensionnel de particules [une pour chaque valeur de \mathbf{x} dans un ouvert de \mathbb{R}^3], dont l'ensemble constitue le "système physique de référence associé au système de coordonnées choisi." Ainsi, *la donnée d'un système de coordonnées admissible sur V a un contenu physique, puisqu'elle définit un tel "fluide de référence"*. Ce fluide peut être caractérisé soit par le réseau tridimensionnel des lignes d'univers " x^0 variable", soit par le champ de 4-vitesse v tangent à ces lignes d'univers.

Cependant, il restait entre autres à définir l'espace associé à un fluide de référence et à munir un tel espace d'une structure de variété différentielle. J'ai affirmé en 1995 [A16] que "les éléments (points) du réseau spatial ne peuvent pas être identifiés à des *points* dans cette variété [la variété espace-temps] mais à des 'lignes d'univers', donc à des *courbes* dans l'espace-temps". On peut voir cela plus facilement en analysant le cas simple d'un référentiel inertiel dans l'espace-temps de Minkowski [a11]. La première formulation rigoureuse de ces idées se restreint au cas local.

2.2 Le cas local [a3, i1, b5]

La définition rigoureuse d'un espace "local" [a3] a été formulée quand il a fallu fournir un cadre précis à l'étude de l'opérateur hamiltonien H dans un espace-temps courbe. Comme nous l'avons montré dans l'article [a1], H dépend du système de coordonnées (i.e., de la carte locale), mais reste invariant quand le changement de carte est purement spatial :

$$x'^j = f^j((x^k)) \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (\text{ou } \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad \text{et} \quad x'^0 = x^0. \quad (22)$$

Nous prouvons facilement que la relation (22) définit une relation d'équivalence entre cartes, quand on considère des cartes qui ont toutes le même domaine de définition U . Nous appelons "*référentiel*" F (sur le domaine ouvert U de la variété espace-temps V) une classe d'équivalence pour cette relation. Disons alors d'une ligne d'univers $l \subset U$ qu'elle est "liée à F " si, dans une certaine carte $\chi \in F$, tous les points de l ont les mêmes coordonnées spatiales x^j . (Ceci est alors vrai dans toute carte $\chi' \in F$.) Pour être précis, définissons d'abord dans l'espace arithmétique \mathbb{R}^4 la "projection spatiale" $P_S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{X} \equiv (x^\mu) \mapsto \mathbf{x} \equiv (x^j)$. Une ligne d'univers l liée à F est l'ensemble de *tous* les points X du domaine U pour lesquels le triplet des coordonnées spatiales est une constante donnée \mathbf{x} :

$$l = l_{\chi \mathbf{x}} \equiv \{ X \in U; P_S(\chi(X)) = \mathbf{x} \}. \quad (23)$$

(Ainsi, l n'est pas nécessairement un ensemble connexe.) Chacune des courbes $l_{\chi \mathbf{x}}$ est invariante par tout changement de carte interne au référentiel F , i.e., on a $l_{\chi' \mathbf{f}(\mathbf{x})} = l_{\chi \mathbf{x}}$ si χ et χ' s'échangent par (22). On peut associer à chaque référentiel F un "espace" M ou M_F : M_F est l'ensemble des lignes d'univers liées à F . Pour chaque carte $\chi \in F$, nous définissons la "carte associée" comme l'application qui, à une ligne d'univers $l \in M$, fait correspondre le triplet constant des coordonnées spatiales des points $X \in l$:

$$\tilde{\chi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad l \mapsto \mathbf{x} \text{ tel que } \forall X \in l, P_S(\chi(X)) = \mathbf{x}. \quad (24)$$

Nous montrons que l'ensemble \mathcal{T} des parties $\Omega \subset M$ telles que

$$\forall \chi \in F, \quad \tilde{\chi}(\Omega) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^3 \quad (25)$$

est une topologie sur M . Puis nous montrons que l'ensemble des cartes associées : $\tilde{F} \equiv \{\tilde{\chi}; \chi \in F\}$, est un atlas sur l'espace topologique (M, \mathcal{T}) , et définit une structure de *variété différentielle* sur M [a3]. *Ainsi la variété espace M_F est parcourue précisément par le triplet formé des coordonnées spatiales dans une carte quelconque $\chi \in F$, voir l'éq. (24).*

Chaque ligne d'univers l liée à F (23) est invariante sous l'ensemble des transformations $x'^0 = g(x^0, (x^k))$, $x'^j = f^j((x^k))$, plus générales que (22). Il en résulte que l'ensemble de ces lignes d'univers, i.e. l'espace M , est lui aussi invariant sous ces transformations. Mais il est préférable de fixer l'application "coordonnée temporelle" $X \mapsto x^0(X)$ lorsqu'on étudie un hamiltonien quantique H , car H dépend de cette application. La donnée d'un référentiel F revient à la donnée conjointe du domaine U de la variété espace-temps, de la congruence des lignes d'univers (23), et de l'application $X \mapsto x^0(X)$, définie pour tous les événements $X \in U$. Si la composante g_{00} de la métrique vérifie $g_{00} > 0$ dans U (dans une carte $\chi \in F$, donc aussi dans toute autre carte $\chi' \in F$), alors les lignes d'univers (23) liées à F sont du genre temps. *Cette notion de référentiel [a3] est une extension naturelle de la notion de référentiel de la mécanique classique.* En effet, en mécanique classique, un référentiel est habituellement défini comme l'ensemble des trajectoires des points d'un solide rigide (la rigidité étant définie par rapport à la métrique spatiale euclidienne invariante qui existe avec un espace-temps galiléen), ensemble complété par la donnée du temps absolu, qui est toujours présent implicitement en mécanique classique. Cette extension réside dans ce qui suit : (i) aucune rigidité n'est demandée, en sorte que le référentiel est déformable de la façon la plus générale ; (ii) on considère un espace-temps général ; (iii) le temps n'est qu'une application coordonnée $X \mapsto x^0(X)$ et n'a rien d'absolu.

En utilisant ces résultats, on peut définir l'espace des états quantiques, pour un référentiel donné F dans un espace-temps donné (V, \mathbf{g}) , comme étant l'ensemble \mathcal{H} des fonctions de carré intégrable définies sur la variété espace correspondante M_F [a2]. On peut aussi définir l'algèbre complète des *tenseurs spatiaux* : l'algèbre en un point $x \in M$ est définie simplement comme l'algèbre des tenseurs sur l'espace

vectorel tangent TM_x [a4]. Ceci contraste avec la définition d'un tenseur spatial par Massa [Gen. Rel. Grav. **5**, 555 (1974)] comme un tenseur d'espace-temps qui est égal à sa projection spatiale (définie avec l'opérateur de projection sur l'hyperplan orthogonal au vecteur v). Par exemple, la 3-vitesse dans le référentiel F d'une particule qui au temps t (coordonnée commune aux cartes de F) est en $x \in M$, est un vecteur $\vec{v} \in TM_x$ [i1].

2.3 Le cas global [a11, i1, b5]

La formulation qui précède s'applique à un domaine paramétrisable de l'espace-temps, i.e. à un ouvert U de la variété espace-temps V tel qu'il existe au moins une carte définie sur U . En général, V lui-même n'est pas paramétrisable. Ainsi un référentiel F est local, selon cette définition. Corrélativement, la variété espace correspondante M_F ne semble pas "maximale". Pour avoir une théorie complète, il était donc nécessaire de définir des concepts globaux et de les lier aux concepts locaux qui précèdent. Pour cela, je considère comme "espace-temps" une variété différentielle V de dimension $N + 1$, N étant donc la dimension de l'espace associé à définir. Je définis un *fluide de référence* (global) par la donnée d'un *champ de vecteurs global régulier v qui ne s'annule pas sur V* . Il n'est pas nécessaire pour mon travail que $N = 3$, ni que V soit munie d'une métrique lorentzienne \mathbf{g} . (C'était déjà vrai pour les concepts locaux résumés au §2.2 [a3].) On remarquera cependant qu'on demande usuellement à un espace-temps lorentzien (V, \mathbf{g}) d'être "orientable dans le temps", ce qui signifie qu'il existe un champ de vecteurs global du genre temps. Un tel champ de vecteurs ne s'annule pas, donc la construction s'appliquera à tout espace-temps lorentzien orientable dans le temps.

Je définis *l'espace global N_v associé au champ de vecteurs v* comme l'ensemble des *courbes intégrales maximales de v* (ou *orbites de v*): Soit $X \in V$, on définit l'application C_X comme la solution de

$$\frac{dC}{ds} = v(C(s)), \quad C(0) = X \quad (26)$$

qui est définie sur l'intervalle ouvert (contenant 0) le plus grand possible, noté I_X . L'existence et l'unicité de cette solution maximale sont bien connues. On appellera "courbe intégrale maximale de v en X " *l'image $l_X \equiv C_X(I_X) \subset V$* , et je définis donc N_v comme l'espace des orbites :

$$N_v \equiv \{l_X; X \in V\}. \quad (27)$$

2.3.1 Le problème de l'existence locale de cartes v -adaptées

Ce qui est intéressant d'un point de vue physique dans la construction de l'espace global N_v associé à un champ de vecteurs v , tout comme dans celle de l'espace local M_F associé à un référentiel F , n'est pas seulement que chacun de ces espaces

soit doté d'une structure de variété différentielle, i.e. essentiellement d'un atlas de cartes. [Ce point est très important malgré tout, parce qu'il permet de faire du calcul différentiel ayant un sens clair sur les quantités spatiales, et donc il permet de définir de manière cohérente des objets physiques tels que la 3-vitesse ou le tenseur vitesse de rotation (spatiale) [a4].] C'est aussi le fait que l'atlas de base soit constitué de *cartes v-adaptées*, i.e. telles que le triplet \mathbf{x} des coordonnées spatiales soit *constant sur toute courbe intégrale l de v* , ou plus exactement soit constant sur l'intersection $l \cap U$, U étant le domaine de la carte considérée : ⁶

$$\forall Y \in l \cap U, \quad P_S(\chi(Y)) = \mathbf{x}. \quad (28)$$

En effet, cette condition permet de définir la position d'un évènement X dans l'espace global N_v ou dans l'espace local M_F simplement par le triplet \mathbf{x} des coordonnées spatiales de X . Elle permet aussi d'identifier un champ de tenseurs spatiaux d'ordre n simplement comme un objet à n indices *spatiaux* i.e. $j_1, \dots, j_n = 1, 2, 3$, se transformant adéquatement par changement purement spatial de coordonnées [A16].

Notons D_U l'ensemble des orbites $l \in N_v$ qui coupent l'ouvert U . Si χ est v -adaptée, l'application

$$\bar{\chi} : D_U \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad l \mapsto \mathbf{x} \text{ tel que (28) a lieu} \quad (29)$$

est bien définie. Les applications $\bar{\chi}$ seront les *cartes* de N_v , et il faut donc qu'elles soient *injectives* [a11, i1]. Dans la suite de ce rapport, j'inclus cette propriété dans la définition d'une carte v -adaptée, à des fins de concision.

Le problème de l'existence de cartes v -adaptées au voisinage d'un point quelconque X_0 de V s'est révélé difficile [a11]. Un théorème bien connu assure l'existence, en chaque point X_0 tel que $v(X_0) \neq 0$, d'une "*carte redressante*" χ dans un voisinage U de X_0 . I.e., χ est telle que :

- ▶ (i) $\chi(U) = I \times \Omega$, $I =] - a, +a[$, $a \neq 0$, Ω ouvert dans \mathbb{R}^N .
- ▶ (ii) Pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, $\chi^{-1}(I \times \{\mathbf{x}\})$ est une courbe intégrale de v .
- ▶ (iii) Dans U , on a $v = \partial_0$, où (∂_μ) est la base naturelle associée à la carte χ .

On pourrait penser à première vue que ce théorème fournit une carte v -adaptée au voisinage de X_0 , parce qu'en effet, pour tout $X \in U$ on a (28) sur la courbe intégrale $l \equiv \chi^{-1}(I \times \{\mathbf{x}\}) \subset U$, où $\mathbf{x} \equiv P_S(\chi(X))$. Mais l n'est pas nécessairement

⁶ Dans le cas de M_F , on doit prendre pour v un champ de vecteurs tangent aux lignes (23) liées au référentiel F , de sorte que les courbes intégrales de v sont ces lignes (23). La condition signifie alors simplement que \mathbf{x} est constant sur ces lignes (23), ce qui est vrai par définition de ces lignes. Ainsi, les cartes $\chi \in F$ sont adaptées à un tel v par définition. Dans le cas de la construction de l'espace global N_v , on a en quelque sorte le problème inverse de celui-ci : au lieu de partir de cartes adaptées, on part du champ v et il faut construire des cartes v -adaptées.

identique à $l_X \cap U$, où l_X est la courbe intégrale *maximale* de v qui passe par X : $l_X \cap U$ peut comporter d'autres branches de la forme $l_1 \equiv \chi^{-1}(I \times \{\mathbf{x}_1\})$ avec $\mathbf{x}_1 \in \Omega$ and $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}$. Dans un tel cas, la carte redressante χ n'est pas v -adaptée, parce que pour $Y \in l_X \cap U$, $P_S(\chi(Y))$ peut prendre des valeurs différentes : \mathbf{x} , \mathbf{x}_1 , ... On voit que, malgré les apparences, l'existence de cartes v -adaptées au voisinage d'un point est un problème *global*. Ceci vient du fait que la notion de courbe intégrale maximale est une notion globale.

Je montre que justement, une carte redressante (χ, U) est v -adaptée ssi pour tout $X \in U$, $\chi(l_X \cap U)$ est de la forme $I \times \{\mathbf{x}\}$, ce qui implique que $l_X \cap U$ est connexe. Or, un résultat (peu) connu dit que, (même) lorsque l_X est fermée dans V : (a) $\chi(l_X \cap U)$ est de la forme $I \times E$, où E est une partie fermée (finie ou dénombrable) de Ω — l'ouvert de \mathbb{R}^N du point (i) ci-dessus ; mais aussi que (b) pour tout point $Y \in l_X \cap U$, $\mathbf{y} \equiv P_S(\chi(Y))$ est un point isolé de E . A cause de (a), c'est manifestement loin d'être le cas général que $\chi(l_X \cap U)$ soit de la forme $I \times \{\mathbf{x}\}$. Je déduis de ce résultat que, lorsque les courbes intégrales maximales sont fermées dans V , la carte redressante (χ, U) est v -adaptée ssi, pour *tout* $X \in U$, $l_X \cap U$ est connexe. Et qu'en remplaçant U par $U' = \chi^{-1}(I \times \Omega')$ où $\Omega' \subset \Omega$ est un voisinage assez petit de $\mathbf{x} \equiv P_S(\chi(X))$, on peut obtenir la connexité de $l_X \cap U'$ pour un point *donné* $X \in U$.

L'étape suivante est d'introduire le flot du champ v , c'est à dire l'application $F : (s, X) \mapsto F(s, X) \equiv C_X(s)$ (où C_X est défini plus haut). Le domaine de F est

$$\mathcal{D} \equiv \bigcup_{X \in V} I_X \times \{X\} \subset \mathbb{R} \times V. \quad (30)$$

Je montre que, lorsqu'une orbite l_X est fermée dans V et non-périodique, $l_X \cap U$ est connexe ssi $I'_{XU} \equiv \{s \in I_X; F(s, X) \in U\}$ est un intervalle ouvert. Or, on a :

$$I'_{XU} \times \{X\} = (\mathbb{R} \times \{X\}) \cap F^{-1}(U). \quad (31)$$

2.3.2 Un argument de transversalité

Les résultats précédents incitent à faire le raisonnement suivant. Supposons donc que v ne s'annule pas et que toutes ses orbites sont fermées dans V et non-périodiques. Prenant un point arbitraire $X \in V$, soit $\chi : U \rightarrow I \times \Omega$ une carte redressante dans un voisinage U de V . Comme on l'a vu, on peut supposer que $l_X \cap U$ est connexe (pour le X dont on part), et donc que I'_{XU} , qui vérifie (31), est un intervalle (ouvert). Lorsque la frontière de l'ouvert U de V est une hypersurface régulière de V , on s'attend à ce que la frontière Σ_U de $\mathcal{D}_U \equiv F^{-1}(U)$ soit une hypersurface régulière de $\mathbb{R} \times V$. Dans ce cas, les intersections de la droite $\mathbb{R} \times \{X\}$ avec Σ_U sont "génériquement" toutes transverses. Alors, si l'on prend $Y \in V$ dans un voisinage W assez petit de X , les intersections de la droite $\mathbb{R} \times \{Y\}$ avec Σ_U devraient être légèrement déplacées mais devraient rester dans le même nombre, de sorte que la structure de $I'_{YU} \times \{Y\} = (\mathbb{R} \times \{Y\}) \cap \mathcal{D}_U$ devrait être la même que

pour $Y = X$. En particulier, si I'_{XU} est un intervalle, alors I'_{YU} devrait aussi être un intervalle, donc $l_Y \cap U$ devrait être connexe également — ainsi, la restriction de la carte redressante χ au voisinage W devrait être v -adaptée.

Après avoir énoncé et démontré deux théorèmes de transversalité et un autre théorème relevant aussi de la topologie différentielle, j'ai pu formaliser cet argument en un théorème [a11]. (J'ai dû aussi étendre certains résultats utilisant une carte redressante au cas où l'image $\chi(U)$ a une forme plus générale, compatible avec une frontière lisse pour U .) Ce théorème assure qu'une carte redressante χ dans un voisinage U_0 d'un point X de V est v -adaptée dans un voisinage $U \subset U_0$ de X , sous réserve que U ait une frontière régulière, que son "image spatiale" $\Omega = P_S(\chi(U))$ soit assez petite, et que U soit tel que les intersections de la droite $\mathbb{R} \times \{X\}$ avec Σ_U soient toutes transverses. L'existence d'un tel voisinage U devrait avoir lieu en chaque point pour un champ v "générique" (parmi ceux dont toutes les orbites sont fermées dans V et non-périodiques) : en général on considère que U est donné et ici c'est X qui est donné, mais il y a beaucoup de latitude dans le choix du voisinage U de X , puisqu'il est seulement astreint à avoir une frontière régulière et à avoir une "image spatiale" assez petite. Je pense donc avoir montré que si v ne s'annule pas et que toutes ses orbites sont fermées dans V et non-périodiques, il doit exister une carte v -adaptée au voisinage d'un point arbitraire $X \in V$ — sauf si v a une "pathologie" que je n'ai pas pu décrire de façon plus précise.

Pour proposer un cadre carré, j'introduis alors une hypothèse liée à ces considérations. Je dis qu'un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ global et ne s'annulant pas sur V est "*normal*" si toutes ses orbites sont fermées dans V et si, au voisinage de chaque point de V , il existe une carte redressante telle que, pour toute orbite l de v , $l \cap U$ soit connexe. (Il y a aussi une version un peu plus générale et sophistiquée de cette hypothèse.) Je prouve que, lorsque v est "normal" en ce sens, il existe bel et bien une carte v -adaptée au voisinage d'un point arbitraire $X \in V$. Je donne un exemple physiquement pertinent : si V est difféomorphe à \mathbb{R}^{N+1} et si $\phi : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow V$ est un difféomorphisme, alors le champ de vecteurs "poussé en avant" par ϕ d'un champ de vecteurs constant $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sur \mathbb{R}^{N+1} , $v = \phi^*\mathbf{v}$, est un champ de vecteurs normal sur V . La topologie mise à part, ces champs sont très généraux car leur classe est stable par les difféomorphismes de V , autrement dit les lignes d'univers qui sont leurs orbites peuvent être déformées arbitrairement.

2.3.3 Les cartes v -adaptées conduisent à un atlas canonique sur N_v

Considérons l'ensemble \mathcal{F}_v des cartes v -adaptées de V , et considérons l'ensemble \mathcal{A} des application $\bar{\chi}$, où $\chi \in \mathcal{F}_v$, éq. (29). Une telle application $\bar{\chi}$ est définie sur la partie D_U de l'espace d'orbites N_v . (Ici U est le domaine de la carte v -adaptée $\chi \in \mathcal{F}_v$.) Tout à fait comme j'avais prouvé [a3] que l'ensemble \mathcal{T} (25) est une topologie sur l'espace "local" M_F , je prouve que l'ensemble \mathcal{T}' des parties $\Omega \subset N_v$

telles que

$$\forall \chi \in \mathcal{F}_v, \quad \bar{\chi}(\Omega) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^3, \quad (32)$$

est une topologie sur cet espace global N_v . [Je définis $\bar{\chi}(\Omega) \equiv \bar{\chi}(\Omega \cap D_U)$.]

Ensuite, je prouve que \mathcal{A} est un atlas sur cet espace topologique, ce qui définit ainsi une structure de variété différentielle sur l'espace global N_v (quand la topologie \mathcal{T}' est métrisable et séparable, ce pour quoi je donne une condition suffisante un peu forte). Pour montrer cela, la principale propriété à prouver est la compatibilité de deux applications $\bar{\chi}, \bar{\chi}'$ sur N_v , associées à deux cartes v -adaptées $\chi, \chi' \in \mathcal{F}_v$. Par rapport au cas de l'espace local M_F [a3], la difficulté suivante se présente. Deux cartes v -adaptées χ et χ' ont en général des domaines différents U et U' , et il peut très bien exister des orbites l telles que

$$U \cap U' = \emptyset, \quad l \cap U \neq \emptyset, \quad l \cap U' \neq \emptyset. \quad (33)$$

I.e., il peut facilement arriver que les domaines D_U et $D_{U'}$ des applications $\bar{\chi}$ et $\bar{\chi}'$ se coupent, bien que les domaines U et U' des cartes χ and χ' ne se coupent pas. Pour surmonter cette difficulté, j'utilise le flot F du champ de vecteurs v pour associer à chaque point Y dans un voisinage $W \subset U$ d'un point quelconque donné $X \in U$, un point $g(Y) \in U'$, avec une application g régulière. Notons que les applications $\bar{\chi}$, avec leurs domaines D_U , sont entièrement définies par la donnée du champ de vecteurs v sur la variété V . C'est en ce sens que l'atlas \mathcal{A} est canonique. Du point de vue physique, l'avantage des cartes v -adaptées a été décrit plus haut.

2.3.4 L'espace local M_F est un ouvert de l'espace global N_v

Soit v un champ de vecteurs normal sur la variété espace-temps V , et soit F un référentiel. Les cartes $\chi \in F$ sont par définition toutes définies sur un même ouvert U de V . Supposons que ces cartes $\chi \in F$ sont toutes v -adaptées, ce qui signifie physiquement que le référentiel F est obtenu à partir du fluide de référence défini par le champ de vecteurs v . Soit $l \in M_F$ une ligne d'univers liée à F : donc, en choisissant n'importe quelle carte χ de F , l est formée des évènements $X \in U$ dont le triplet des coordonnées spatiales (dans la carte χ) est un même vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Je montre qu'alors pour tout $X \in l$, l'orbite l_X est la même, disons $l_X = l' \in N_v$, et que l'on a $l = l' \cap U$. De plus, on a $l' = \bar{\chi}^{-1}(\mathbf{x}) = \bar{\chi}^{-1}(\bar{\chi}(l))$. Ainsi, l'application $I : M_F \rightarrow N_v, l \mapsto l'$ (qui est indépendante de la carte $\chi \in F$) est simplement égale à $I = \bar{\chi}^{-1} \circ \tilde{\chi}$, quelle que soit la carte $\chi \in F$. L'application I est une application injective de $\text{Dom}(\tilde{\chi}) = M_F$ sur $\text{Dom}(\bar{\chi}) = D_U$. Ainsi l'espace local M_F est constitué des intersections avec le domaine local U des lignes d'univers appartenant à l'espace global N_v , et l'on peut identifier M_F avec $I(M_F) = D_U$, qui est un ouvert de N_v . Le lien entre les formulations locale et globale est donc aussi bon qu'on pouvait le souhaiter.

3 Publications depuis 2010

3.1 Revues avec comité de lecture

3.1.1 Revues avec comité de lecture : articles parus de 2010 à 2014

- [a1] M.A., F. Reifler, “Basic quantum mechanics for three Dirac equations in a curved spacetime”, *Braz. J. Phys.* **40**, 242–255 (2010).
- [a2] M.A., F. Reifler, “A non-uniqueness problem of the Dirac theory in a curved spacetime”, *Ann. Phys. (Berlin)* **523**, 531–551 (2011).
- [a3] M.A., F. Reifler, “General reference frames and their associated space manifolds”, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **8**, 155–165 (2011).
- [a4] M.A., “A solution of the non-uniqueness problem of the Dirac Hamiltonian and energy operators”, *Ann. Phys. (Berlin)* **523**, 1008–1028 (2011).
- [a5] M.A., F. Reifler, “Four-vector vs. four-scalar representation of the Dirac wave function”, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **9**, No. 4 (juin), 1250026 (2012) [23 pages].
- [a6] M.A., F. Reifler, “Equivalent forms of Dirac equations in curved spacetimes and generalized de Broglie relations”, *Braz. J. Phys.* **43**, No. 1-2, 64–77 (2013).
- [a7] M.A., “A simpler solution of the non-uniqueness problem of the covariant Dirac theory”, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **10**, No. 7, 1350027 (2013) [24 pages].
- [a8] M.A., “On the non-uniqueness problem of the covariant Dirac theory and the spin-rotation coupling”, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, No. 11, 4032–4044 (2013).
- [a9] M.A., “Should there be a spin-rotation coupling for a Dirac particle?”, *Int. J. Theor. Phys.* **53**, No. 6, 1993–2013 (2014).

3.1.2 Revues avec comité de lecture : articles à paraître ou soumis

- [a10] M.A., “Some remarks on quantum mechanics in a curved spacetime, especially for a Dirac particle”, *Int. J. Theor. Phys.* (à paraître, version électronique parue), DOI: 10.1007/s10773-014-2439-4.
- [a11] M.A., “Defining the space(s) in a general spacetime”, preprint soumis pour publication.

3.2 Actes de conférences invitées dans des colloques avec comité de lecture

- [i1] M.A., “On reference frames and the definition of space in a general spacetime” (Text of an invited talk), *Proc. 3rd Int. Conf. on Theoretical Physics “Theoretical Physics and its Applications”*, ed. by Timur F. Kamalov; Moscow Institute of Physics & Technology, Moscow (2014), pp. 71-76.

3.3 Actes de colloques avec comité de lecture

- [b1] M.A., F. Reifler, “Non-uniqueness of the Dirac theory in a curved spacetime” (Text of a talk given by M.A.), *Proc. 1st Mediterranean Conference on Classical and Quantum Gravity*, ed. by S. Basilakos *et al.*; *J. Phys. Conf. Ser.* **222**, 012042 (2010) [8 pages].
- [b2] M.A., F. Reifler, “Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime” (Text of a talk given by M.A.), *Proc. 5th Int. Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond*, ed. by Hans-Thomas Elze *et al.*; *J. Phys. Conf. Ser.* **306**, 012061 (2011) [8 pages].
- [b3] M.A., F. Reifler, “Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime” (Text of a talk given by M.A.), *Proc. 13th Int. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization*, ed. by Ivailo Mladenov, Andrei Ludu & Akira Yoshioka; *J. Geometry & Symmetry in Physics* **24**, 77–88 (2011).
- [b4] M.A., “Summary of a non-uniqueness problem of the covariant Dirac theory and of two solutions of it” (Text of a plenary talk), *Proc. 14th Int. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization*, ed. by Ivailo Mladenov, Andrei Ludu & Akira Yoshioka; Avangard Prima, Sofia (2013), pp. 48-60.
- [b5] M.A., “On the definition of a reference frame and the associated space in a general spacetime” (Text of a communication by poster), *Proc. Journées Systèmes de Référence Spatiotemporels 2013*, ed. by Nicole Capitaine; Observatoire de Paris (2014), pp. 36-37.
- [b6] M.A., “On quantum mechanics in a curved spacetime, especially for a Dirac particle”, Talk given at the *7th Int. Workshop DICE2014: “Spacetime - Matter - Quantum Mechanics”*, Castiglioncello (Italy), September 15-19, 2014. Text in preparation. Slides

3.4 Séminaires, workshops

- [s1] “Equations de Dirac dans un espace-temps courbe et Mécanique quantique associée”, *Séminaire de Physique Mathématique de l’Institut Fourier*, 24 janvier 2011 (*sur invitation*). Transparents
- [s2] “Dirac equation in a curved spacetime: the standard equation and the alternatives”, Tutorial talk at the *Meeting on Relativistic Quantum Walks*, Laboratoire d’Informatique de Grenoble, February 6-7, 2014 (*by invitation*). Slides

4 Objectifs / Projet de recherche

Depuis une dizaine d’années, j’ai travaillé majoritairement sur la mécanique quantique dans un espace-temps courbe, avec une activité secondaire, motivée en partie par ce thème principal, sur la théorie des référentiels et la définition de l’espace dans un espace-temps général. J’ai l’impression d’avoir en gros résolu les problèmes que j’avais attaqués (on en jugera par les parties 1 et 2 de ce rapport). S’il n’arrive pas un *input* expérimental nouveau, je ne vois pas pour l’instant, dans le prolongement direct de ces recherches, de problème important qu’il soit réellement nécessaire de résoudre. (Je pourrais néanmoins être amené à de nouvelles discussions dans l’un de ces domaines; j’en ai d’ailleurs une en ce moment même sur la MQ en espace-temps courbe avec Alexandre Silenko.) J’envisage donc un changement de l’orientation majoritaire de mes recherches.

4.1 Statut des équations “à une particule”, source du champ gravitationnel, et théorie des champs en espace-temps courbe

Les résultats que j’ai obtenus en mécanique quantique dans un espace-temps courbe concernent exclusivement les états à une particule. Ceci peut être justifié par le fait que les effets physiques mesurés jusqu’à présent (effet “COW”, effet Sagnac, états quantiques gravitationnels des neutrons) ou prospectifs (effet Mashhoon) sont des effets à une particule, et que les effets d’interaction gravitationnelle entre particules quantiques sont sûrement très petits dans les conditions envisageables expérimentalement. Pourtant, certains chercheurs envisagent des expériences faisant intervenir de tels effets, notamment pour essayer de tester l’équation de Schrödinger-Newton. L’interprétation physique de cette équation pose des problèmes intéressants. En particulier, il semble assez clair que, pour donner un sens physique à l’équation de Schrödinger-Newton, il faut que la matière

quantique en tant que telle soit la source du champ gravitationnel. En ce sens, cette équation tente de décrire des effets d’interaction gravitationnelle entre particules quantiques. Mais il existe une autre possibilité en ce qui concerne la source du champ gravitationnel dans une théorie tentant de lier le quantique et la gravitation : c’est que cette source reste la matière classique (classique parce que considérée à l’échelle macroscopique), caractérisée par un tenseur énergie-impulsion plus ou moins phénoménologique. Cette autre possibilité est celle que j’ai admise dans le passé, dans une conception selon laquelle le champ gravitationnel lui-même n’a pas à être quantifié [B15]. Entre temps, cette conception a trouvé des défenseurs. Le couplage quantique–gravitation signifie alors simplement que la théorie quantique doit être écrite dans un espace-temps courbe. Dans ce cas, ce qu’il reste à faire après la mécanique quantique d’une particule dans le champ de gravitation est essentiellement la théorie des champs dans un espace-temps courbe. La théorie existante a conduit des physiciens à faire des prédictions intéressantes voire excitantes (même si elles sont difficiles à tester pour l’instant, sauf à accorder un crédit décisif à des expériences sur des modèles réels analogiques tels que le graphène). Je souhaiterais mieux comprendre les bases physiques de cette théorie.

4.2 Théories de la gravitation avec un référentiel privilégié

Des théories admettant un référentiel privilégié existent dans un cadre proche de la relativité générale, i.e. en postulant des équations généralement-covariantes pour la métrique et un champ additionnel dans l’espace-temps : par exemple le champ de 4-vitesse v des particules liées au référentiel privilégié. C’est le cas de la théorie de l’“éther d’Einstein” de T. Jacobson. Néanmoins, cela fait sens également de postuler des équations qui, au moins sous leur forme initiale, ne sont valables que dans le référentiel privilégié postulé. Une telle approche a été rendue plus solide théoriquement par l’établissement d’un cadre rigoureux à la notion de l’espace tridimensionnel associé à un référentiel (voir la partie 2). J’avais déjà utilisé cette notion, mais en la postulant axiomatiquement, dans mes travaux antérieurs sur la gravitation : je partais a priori d’un espace-temps de la forme $\mathbb{R} \times M$ avec M une variété tridimensionnelle [A15], [A16]. Ce que les résultats récents apportent, c’est la possibilité de déduire bel et bien une variété différentielle tridimensionnelle M de la donnée de l’espace-temps V et d’un champ de vecteurs v sur V . (Dans le cas général, l’espace M obtenu ne factorise pas forcément V .) Par ailleurs, la solution la plus simple au problème de non-unicité que j’ai mis en évidence pour la théorie de Dirac en espace-temps courbe conduit aussi à postuler un référentiel privilégié. Rappelons que cette solution “simple” et la solution “conservatrice” pourraient être départagées [a9] par l’observation expérimentale ou au contraire l’exclusion expérimentale éventuelles de l’effet Mashoon : dans le premier cas, la solution “simple” serait exclue. (Toutefois, cela n’exclurait pas une théorie de la gravitation avec un référentiel privilégié.) Dans le deuxième cas, la solution conservatrice serait exclue et ceci favoriserait fortement la solution simple, qui

pour le coup demande un référentiel privilégié.

Il me semble donc que les résultats des recherches que j'ai menées depuis une dizaine d'années peuvent inciter à revenir à la théorie développée antérieurement, ou plus généralement à une théorie du même type. En ce qui concerne la théorie antérieure (par ex. [A34]), il y a quelques "pièces manquantes" : la théorie du champ électromagnétique dans le champ de gravitation n'est pas assez développée et même pas assez expliquée, bien que les équations principales aient été publiées [B13]. Et d'autre part, les équations post-newtoniennes du mouvement des centres de masse d'un système de corps bien séparés ne sont pas disponibles pour la deuxième version [A35] de la théorie — la première version (par ex. [A34]) ayant dû être rejetée à cause d'une violation surprenante du principe d'équivalence faible, qui intervient pour les corps gravitationnellement actifs (et non pour les particules d'épreuve).