Un modèle micro-macro variationnel et ses prédictions pour les hétérogénéités et les textures de déformations (aciers)

M. Arminjon - D. Imbault

Laboratoire "Sols, Solides, Structures" (3S), Grenoble

1. Introduction : **Les modèles micro-macro et leurs paramètres**

2. Présentation du modèle en relation avec d’autres modèles

(i) Compatibilité des déformations ds modèles fraction volumiq.

(ii) Répartition des déformations et Minimisation du travail

(iii) Hypothèses d’homogénéité statistique pour modèles usuels

(iv) Le modèle : algorithme de base et domaine d’application

(v) Le principe d’hétérogénéité minimale

3. Mise en œuvre numérique

4. Prédictions et comparaison expérimentale (aciers)

(i) Hétérogénéités de déformation

(ii) Textures de déformation

1. Introduction : Les modèles micro-macro et leurs paramètres

* modèle *micro* $\leftrightarrow$ *macro* : il ya deux sens mais pas équivalents !

* tout modèle va introduire des paramètres de deux sortes :
  - les paramètres de la loi de comportement locale
    ex.: loi de Schmid $\Rightarrow$ lois d'évolution des cissions critiques
  - les paramètres de la « loi d'interaction »
    ex.: paramètre α du modèle auto-cohérent élastoplas. simplifié

* Ces paramètres sont rarement mesurables (cf. ex. ci-dessus), donc il faudra les « ajuster » si l'on veut faire des prédictions
$\Rightarrow$ les données expér. servent à la fois à l'*ajustement* et au *test*

* Les mesures « macro » fournissent souvent peu de données
* Les mesures « micro » fournissent bcp + de données (ex. texture)
$\Rightarrow$ la transition *macro*$\rightarrow$*micro* est un test plus sévère pour un modèle. Exemple : textures obtenues en (grandes) déformations

* Le modèle présenté dépend d'*un* paramètre mesurable.

2. Présentation du modèle en relation avec d'autres modèles

(i) *Compatibilité des déformations et modèles de fractions volum.*

* « *modèles de fractions volumiques* » : *microgéométrie ignorée* comportement des constituants et leurs fractions vol. pris en cpte.

⇒ *une* (vitesse de) déformation $\mathbf{D}^k$ et *une* contrainte $\mathbf{\Sigma}^k$

par « constituant » k (en nombre fini : $k = 1,..., n$).

* $\mathbf{D}^k$ ne peut *pas* être interprété comme la valeur constante du champ micro $\mathbf{d}$ dans le constituant k :

En effet *un champ de déformation constant par morceaux ne peut pas donner un déplacement continu aux interfaces.*

(sauf cas particuliers impliquant entre autres des interfaces planes)

⇒il faut interpréter $\mathbf{D}^k$ comme la *moyenne* de $\mathbf{d}$ ds le constituant k

* Mais avec cette interprétation *on peut se donner arbitrairement la distribution des moyennes*, $(\mathbf{D}^k)_{k=1,...,n}$: on pourra toujours construire un champ $\mathbf{d}$ *compatible* et donnant ces moyennes.

⇒ « compatibilité »: pas un argument pour départager les modèles

(ii) *Répartition des déformations et Minimisation du travail*

* Souvent une « *énergie* » fournit un *potentiel pour la loi micro*

ex.: plasticité standard, $\boldsymbol{\sigma} = \partial w / \partial \mathbf{d}$, $w \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$ puissance vol.

(autres exemples disponibles sur demande)

* Il est alors tentant de supposer que *les hétérogénéités de déformation sont régies par une recherche de dépense minimale*

* Le *théorème de la borne sup.* (plasticité standard) y encourage :

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\, dV = \mathrm{Min}\{ \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^*:\mathbf{d}^*\, dV \;;\; \mathbf{d}^* = \mathrm{sym}\,(\mathbf{grad}\ \mathbf{v}^*)$$

$$\text{avec } \mathbf{v}^* \text{ C.P.A., et } \forall \mathbf{x}\ \ \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) \text{ associé à } \mathbf{d}^*(\mathbf{x})\}.$$

(C.L. en vitesses imposées sur toute la frontière)

(ii) *Répartition des déformations et Minimisation du travail (suite)*

* le théorème de la borne supérieure ne fournit pas directement un modèle car :

    - il débouche plutôt sur une formulation « éléments finis »,

    - il suppose la microgéométrie connue,

    - et *dans le Pb. d'homogénéisation les C.L. sont inconnues :* « Les macro-éléments [VER] équivalents sont contraints les uns par les autres, et non par la machine » (Hill 1984).

(donc C.L. différentes d'un VER à son voisin, et non uniformes)

Or : plasticité ⇒ micro-instabilité ⇒ sensibilité aux C.L.

⇒ *Une approche purement déterministe risque de ne pas suffire* : on va (on doit ?) se contenter de prédire les moyennes des champs dans les constituants, dans une situation « stochastique »

(iii) *Quatre hypothèses d'homogénéité statistique*

Les *deux 1ères* sont nécessaires à *tous* les modèles micro-macro

Les deux autres : spécifiques des *modèles de fractions volumiques*

a) Les *champs* **σ** et **d** doivent être *macro-homogènes* au sens de Hill : leurs moyennes vol doivent être ≈ indépend^tes du VER, de +

$\overline{\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{d}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}'} : \overline{\mathbf{d}}$ ($\overline{}$ = moyenne vol., **σ'** pas forcément associé à **d**)

b) Le *matériau* lui-même doit être *statistiquement homogène*, i.e. : les lois statistiques caractérisant la distribution de « l'état » X (X = *liste des paramètres qui rendent hétérogène la loi micro*) doivent être ≈ *indépendantes du VER*. Ex.: *FDO*.

c) Modèles de fractions volumiques (MFV) : « *constituants* » définis non pas géométriquement mais par leur *état*.

Ex. *polycristal. Un « constituant » n'est pas un grain mais une famille de grains distincts ayant la même orientation cristallo.*

Un MFV prédit un $\mathbf{D}^k$ par « constituant » k $\Rightarrow$ $\mathbf{D}^k$ à interpréter comme la moyenne de **d** dans la zone Z_k = {grains d'orientat^{n} $\mathbf{R}^k$}

Cette moyenne doit être ≈ indépendante du VER : *champs SH.*

d) Un MFV prédit une vitesse de déformation $\mathbf{D}^k$ par « constituant » k, *et reliée à une contrainte* $\mathbf{\Sigma}^k$ *par la loi locale*.

Pour que ceci ait un sens, il faut en principe que les champs **d** et $\boldsymbol{\sigma}$ vérifient les conditions de « macro-homogénéité » de Hill, mais *dans la zone* Z_k - et ceci dans *chaque* zone Z_k (k = 1,..., n).

Quel que soit le MFV utilisé, ces 4 hypothèses doivent être posées

Si elles sont vérifiées, on peut écrire la *puissance globale* dépensée dans un VER Ω comme une *somme discrète* :

$$W = \mathbf{\Sigma{:}D} = f_1\, \mathbf{\Sigma}^1 : \mathbf{D}^1 + ... + f_n\, \mathbf{\Sigma}^n : \mathbf{D}^n , \quad f_k \equiv V(Z_k)/V(\Omega)$$

soit $$\boxed{W = f_1\, W^1(\mathbf{D}^1) + ... + f_n\, W^n(\mathbf{D}^n),}$$

avec $W^k(\mathbf{D}^k) \equiv \mathbf{\Sigma}^k : \mathbf{D}^k$ fonction puissance dans « constituant » k

Ceci permet de retrouver les *bornes*

inférieure (modèle « statique », cf. Bishop & Hill 1951)

supérieure (« majoration de Taylor », cf. Bishop & Hill 1951)

sous une forme « opératoire » (somme sur les orientations)

et qui permet de faire une transition continue entre les deux

(iv) *Le modèle : algorithme de base*

* On pose les quatre hypothèses statistiques énoncées juste avant !
* L'inconnue est la répartition $(\mathbf{D}^k)_{k\ =\ 1,\ldots,n}$ des taux de déformations *moyens* dans les n orientations présentes dans le VER.

* On définit la moyenne d'une répartition $(\mathbf{D}^{*\,k})$:

$$\mathbf{D}^* \equiv f_1\, \mathbf{D}^{*\,1} \ +\ldots+ f_n\, \mathbf{D}^{*\,n}.$$

Pour le Passage macro $\rightarrow$ micro, on se donnera $\mathbf{D}$ (taux macro) et la répartition cherchée devra satisfaire la contrainte $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$.

* On définit *l'hétérogénéité moyenne* d'une répartition $(\mathbf{D}^{*\,k})$:

$$h = h((\mathbf{D}^{*\,k})) \equiv f_1 \,\|\mathbf{D}^{*\,1} - \mathbf{D}^*\| + \ldots + f_n\, \|\mathbf{D}^{*\,n} - \mathbf{D}^*\|.$$

* On introduit un *Pb. de Minimum dépendant d'un paramètre r* :

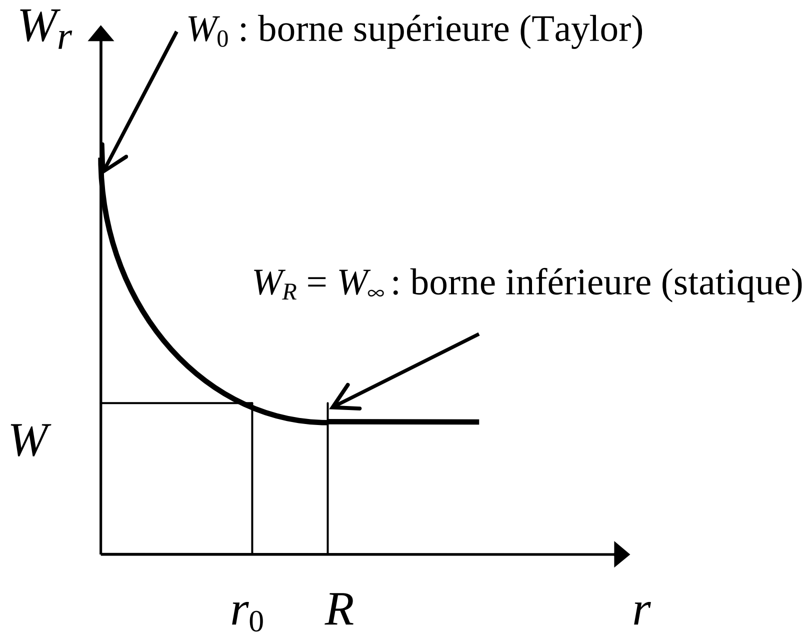
$$W_r = W_r\,(\mathbf{D}) \equiv \mathrm{Min}\,[f_1\, W^1(\mathbf{D}^{*\,1}) + \ldots + f_n\, W^n(\mathbf{D}^{*\,n})]$$

sous contraintes $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$ et $h \leq r$.

Propriétés : $r = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{D}^{*\,k} = \mathbf{D} \;\; \forall k \qquad \Rightarrow$ borne sup : $W \leq W_0$

$r = \infty \Rightarrow\; h \leq r$ toujours vrai $\;\Rightarrow$ borne inf : $W_\infty \leq W$

W_r décroît quand r augmente.



* *Autres propriétés* (moins immédiates mais prouvées) :

1) Il existe pour chaque **D** macro une valeur $r_0 = r_0(\mathbf{D})$ telle que

$$W(\mathbf{D}) = W_{r_0}(\mathbf{D}).$$

$\Rightarrow$ *si on connaît la dépendance* $r_0(\mathbf{D})$*, on peut calculer loi macro.*

2) Sauf cas particulier (borne inf.) le Min est toujours atteint sur la *frontière*, i.e. :

la répartition solution du Pb. W_r a *exactement* l'hétérogénéité r.

3) *L'une des répartitions* solutions du Pb. W_∞ correspond au *modèle statique*, i.e. $\mathbf{\Sigma}^{*\,k} = \mathbf{\Sigma}\ \ \forall k$:

- prouvé si potentiel régulier (plasticité exclue);
- plasticité : génériquement, le modèle statique impose que *seul le constituant « le + faible »* (pour la contrainte imposée) *se déforme* ($\Rightarrow$ *modèle statique = mauvais modèle pour le polycristal en GD*); dans ce cas générique, le résultat 3) est vrai en plasticité.

Propriété pas immédiate en plasticité, pas prouvée, mais plausible: *solution unique* (sauf pour la borne inférieure).