Mécanique quantique dans un champ de gravitation
janvier 2006 — décembre 2009

Mayeul Arminjon

Laboratoire "Sols, Solides, Structures, Risques",

UMR 5521 CNRS/ Université Joseph Fourier/ Institut National Polytechnique de Grenoble,

BP 53, F-38041 Grenoble cedex 9, France.

Table des matières

1 Bref bilan de mes travaux antérieurs en physique théorique

Mes travaux antérieurs en physique théorique ont été centrés sur une théorie relativiste scalaire de la gravitation avec un référentiel privilégié. (Cf. un bilan de 1991 à 2003, ou un bilan de 2001 à 2005.) La présence d'un référentiel privilégié est reconnue, par exemple par Butterfield et Isham (2001), comme une possibilité pour résoudre les problèmes à l'interface entre gravitation et théorie quantique, et singulièrement pour résoudre le "problème du temps". [En gros : la théorie quantique a besoin d'un temps privilégié, en quelque sorte indépendant des processus physiques (ce n'est pas un opérateur, par exemple), alors que la relativité générale fournit une infinité de coordonnées temporelles interchangeables.] Certes, cette possibilité n'est pas celle que ces auteurs privilégient, mais c'en est une qui fournirait une solution simple si l'on savait résoudre la difficulté qui saute aux yeux : celle de construire une théorie de la gravitation avec un référentiel privilégié et qui s'accorde avec les observations. [1] J'ai beaucoup travaillé sur ma théorie scalaire et sur son test observationnel, et je pense qu'un certain nombre de points sont acquis [a1]. Un prolongement de ce travail a été l'application à la mécanique céleste de la relativité générale du schéma post-newtonien asymptotique mis au point pour la théorie scalaire. Cette application m'a conduit à proposer un terme supplémentaire, dû à la rotation propre du corps considéré, dans les équations de Lorentz-Droste (dites aussi d'Einstein-Infeld-Hoffmann). L'analyse des conséquences de ce terme, aussi bien que la poursuite du test de la théorie scalaire, ne pourraient guère être effectuées que dans le cadre d'une collaboration avec des observateurs et des expérimentateurs, qu'il ne me serait pas aisé de lancer dans le contexte où j'effectue ma recherche. De plus, je suis arrivé à la conclusion qu'il y a beaucoup d'ajustements de paramètres spécialisés en

[1] D'autres auteurs travaillent sur cette question, en particulier T. Jacobson et coll. avec leur "Einstein-aether theory", dotée d'un référentiel privilégié défini "dynamiquement".

mécanique céleste [voir un chapitre de synthèse sur la théorie scalaire, Sect. 4.6]. Il me semble donc que la question du lien avec la théorie quantique représente maintenant un travail plus urgent.

2 Equations d'ondes quantiques dans un champ de gravitation

2.1 Motivation

Dans la situation qui vient d'être décrite, il m'est apparu approprié de *réorienter mes recherches* vers la mécanique quantique relativiste dans un espace-temps courbe. Ceci, principalement dans le but d'examiner quelles sont les différentes écritures possibles de cette mécanique quantique — notamment pour confirmer ou infirmer la thèse énoncée ci-dessus, en regardant si la présence d'un référentiel privilégié rend effectivement plus facile ou plus naturel d'écrire cette mécanique quantique. Et aussi, pour déterminer si ces différentes écritures possibles peuvent être départagées expérimentalement.

En effet, le sujet de la mécanique quantique dans un champ de gravitation n'est plus un sujet vierge expérimentalement : en plus des expériences d'interférométrie neutronique (Colella-Overhauser-Werner, années 70) et atomique (Kasevich-Chu, Riehle-Bordé et al., années 90), il y a maintenant les mesures de la transmission de neutrons ultra-froids par une fente horizontale, réalisées à l'Institut Laue-Langevin (Grenoble), mesures qui permettent de vérifier la quantification de l'énergie de ces neutrons dans le champ de pesanteur terrestre. Il est frappant de constater que l'interprétation de toutes ces expériences est faite systématiquement dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-relativiste. Non-relativistes, les atomes ou les neutrons utilisés le sont certes nettement, tant par leur énergie cinétique que par leur énergie potentielle newtonienne (comparées à leur énergie de masse au repos). Il est donc clair que l'emploi de cette équation était justifié. Néanmoins, la gravitation est maintenant décrite dans le cadre de théories relativistes avec un espace-temps courbe, ce qui conduit à formuler des équations d'ondes généralisées : par exemple la généralisation standard de l'équation de Dirac, proposée par Fock et par Weyl — ci-après l'équation DFW. Il semble souhaitable de déterminer les prédictions faites par ces équations pour ces expériences, ne serait-ce que pour vérifier que l'écart avec la théorie non-relativiste est encore négligeable aux précisions atteintes actuellement — et surtout pour se préparer au moment où ce ne sera plus le cas, ce qui ouvrira la possibilité d'un test direct de la façon dont nous concevons le couplage entre gravitation et théorie quantique.

Par ailleurs, j'ai proposé antérieurement [B15], [A22] un essai d'interprétation de la correspondance classique-quantique (qui associe une équation d'ondes quantique à un hamiltonien classique). Cette interprétation repose à la fois sur des considérations purement mathématiques, dues surtout à Whitham, et sur l'heuristique de la mécanique ondulatoire de Schrödinger. Il me semble que cette interprétation saisit bien plusieurs aspects importants de la mécanique quantique. Il est intéressant, à mon avis, que cette interprétation conduise, au moins à première vue, à restreindre fortement les systèmes de coordonnées admissibles sur l'espace de configuration étendu (i.e. sur l'espace-temps, dans le cas d'une particule unique), d'une façon qui équivaut à sélectionner un référentiel privilégié, avec une coordonnée temporelle unique — rejoignant ainsi, depuis un départ tout à fait différent, mes travaux sur la gravitation proprement dite. Dans ce travail de 1998, j'ai montré que cette interprétation aboutit sans ambiguïté à une écriture unique pour l'équation de Klein-Gordon dans un champ de gravitation statique. L'équation ainsi obtenue est distincte de l'équation "standard" de Klein-Gordon dans un espace-temps courbe (laquelle dépend d'un paramètre scalaire arbitraire). Mais l'équation de Klein-Gordon s'applique à des particules de spin 0, tandis que les neutrons sont des particules de spin 1/2. De telles particules sont assujetties à l'équation de Dirac.

Le programme que je m'étais fixé consistait donc :

- **i**) à étudier les généralisations possibles de l'équation de Dirac au cas d'un espace-temps courbe, en essayant de partir de mon interprétation antérieure de la correspondance classique-quantique ;
- **ii**) à analyser et à comparer le comportement de ces équations de Dirac "gravitationnelles" dans le cas d'un champ gravitationnel faible et de particules lentes, pour lequel on dispose de résultats expérimentaux qui vont sans doute devenir de plus en plus précis.

C'est dans le cadre d'une mise à disposition au Département de Physique de l'Université de Bari que j'ai commencé à le réaliser.

2.2 Equations de Dirac & de Klein-Gordon via la correspondance classique-quantique

L'approche standard pour obtenir les équations d'ondes de la mécanique quantique relativiste en présence d'un champ de gravitation consiste à *covariantiser* l'équation d'ondes valable en l'absence de gravitation (donc pour un espace-temps plat) : on cherche une équation d'ondes généralement-covariante, et coïncidant avec l'équation valable pour l'espace-temps plat dans un système de coordonnées dans lequel, au point considéré, la métrique a la forme de Poincaré-Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ et les coefficients de la connexion s'annulent. Cette procédure est ambigüe — en particulier, mais pas uniquement, dans le cas d'une équation d'ondes du deuxième ordre telle que l'équation de Klein-Gordon. (Cette ambiguïté est connue, cf. par ex. Tagirov.) Mon approche est différente, elle consiste à appliquer la correspondance classique-quantique.

J'ai commencé [a2] par adapter le travail précédent [B15], [A22] sur la correspondance quantique, pour pouvoir l'appliquer à l'équation de Dirac. Considérons une particule relativiste classique dont le mouvement est régi par le hamiltonien H, donné en fonction de la 3-impulsion $\mathbf{p}$, de la position spatiale $\mathbf{x}$, et du temps t, par l'équation

$$(E - qV)^2 - (\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 c^2 - m^2 c^4 = 0 \qquad \text{si} \quad E = H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \tag{1}$$

[en prenant comme example le cas d'une particule chargée, de charge q, dans un potentiel électromagnétique $(V, \mathbf{A})$]. Selon l'interprétation proposée de la mécanique ondulatoire, cette relation algébrique n'est autre, au facteur $\hbar$ près, que *l'équation de dispersion* (reliant la fréquence ω au covecteur d'ondes spatial $\mathbf{k}$) de l'équation d'ondes quantique cherchée. L'équation de dispersion est reliée de façon biunivoque à l'équation d'ondes, par la correspondance

$$K_\mu \longrightarrow \partial_\mu / i \qquad (\mu = 0, ..., 3), \tag{2}$$

où $K_0 = -\omega$ et $K_j = k_j,\ j = 1, 2, 3$. Cette dernière correspondance est purement mathématique : elle permet de retrouver une équation d'ondes linéaire n'ayant pas nécessairement quoi que ce soit de "quantique", en partant de son équation de dispersion. (Cf. Whitham, "Linear and nonlinear waves".) Dans le cas de l'équation de dispersion (1) associée à une particule relativiste, la correspondance (2) fournit l'équation de Klein-Gordon. Mais la relation algébrique (1), du 2ème degré, a une autre solution que la solution physiquement intéressante H. L'équation obtenue par la correspondance (2) — l'équation de Klein-Gordon — aura donc, elle aussi, trop de solutions. On peut alors penser qu'en *factorisant (1)* en un produit de polynômes du premier degré, *avant* d'appliquer la correspondance (2) à l'un quelconque des facteurs obtenus, on obtiendra une équation d'ondes plus "fondamentale". Ceci aboutit à l'équation de Dirac. L'intérêt de cette approche est notamment qu'elle fonctionne aussi bien pour les cas d'une particule *a*) libre, *b*) soumise à un champ électromagnétique, *c*) ayant un mouvement géodésique dans une métrique statique $\boldsymbol{g}$ [a2]. Dans les cas *a*) et *b*), on retrouve ainsi l'équation de Dirac usuelle dans un espace-temps plat, avec ou sans champ électromagnétique.

Pour le cas *c*), celui d'un champ de gravitation statique, il existe en effet un hamiltonien classique, vérifiant une relation quadratique du même type que (1) : j'ai montré en 1998 que l'énergie de la particule (telle qu'elle est définie par Landau & Lifchitz), une fois réexprimée en fonction de la 3-impulsion $\mathbf{p}$, est un hamiltonien H' dont les trajectoires sont les géodésiques de $\boldsymbol{g}$ [B15]. Précisons que ce H' est défini, comme l'est normalement un hamiltonien, sur le produit de l'espace de phases à six dimensions par le temps, tandis que le "superhamiltonien" $\tilde{H}$, considéré par Misner-Thorne-Wheeler, est défini sur l'espace de phases "relativiste" à huit dimensions. C'est H', et non $\tilde{H}$, qui convient pour appliquer la correspondance classique-quantique [B15]. L'équation de dispersion associée à H' est simplement [a2]

$$g^{\mu\nu} K_\mu K_\nu - m^2 = 0 \qquad (\text{signature } +---,\ \hbar = 1 = c). \tag{3}$$

Elle est identique à celle trouvée à partir de (1) pour une particule libre ($V = 0$, $\mathbf{A} = 0$) dans un espace-temps plat. [2] La même factorisation de (3) s'applique donc dans les deux cas, et en appliquant la correspondance (2) à l'un quelconque des facteurs obtenus, on débouche [a2] sur l'équation de Dirac :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbf{1}_4)\psi = 0, \tag{4}$$

avec la relation d'anticommutation (découlant de la factorisation)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\, \mathbf{1}_4. \tag{5}$$

La question se pose alors de savoir dans quels systèmes de coordonnées on a le droit de faire ce raisonnement, donc *dans quels systèmes de coordonnées on a le droit d'utiliser la correspondance classique-quantique.* En analysant les transformations de l'opérateur d'ondes et de l'équation de dispersion, j'avais trouvé [B15], [A22] qu'il n'est cohérent d'utiliser cette correspondance que dans des classes de systèmes s'échangeant par des transformations ayant toutes les dérivées secondes nulles au point considéré, $\left(\frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)_{Y=X} = 0, \quad \mu, \nu, \rho \in \{0, ..., N\}$. ($N+1$ est la dimension de l'espace de configuration étendu V, qui ici peut être très général, et qui sera ensuite l'espace-temps.) Ceci définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}_X$ entre les cartes $\chi : Y \mapsto (x^\mu)$ définies dans un voisinage de $X \in \mathrm{V}$. On doit donc se donner, $\forall X \in \mathrm{V}$, une classe d'équivalence $\mathcal{C}_X$ de cartes modulo $\mathcal{R}_X$. De façon équivalente [a4], on peut se donner une *connexion sans torsion* sur le fibré tangent TV, caractérisée par le fait que, $\forall \chi \in \mathcal{C}_X$, ses coefficients s'annulent en X. La condition d'onde plane locale s'écrit alors $D_\nu K_\mu(X_0) = 0$ et la correspondance s'écrit $K_\mu \to D_\mu / i$.

- Dans une variété pseudo-riemannienne générale $(\mathrm{V}, g_{\mu\nu})$, une classe $\mathcal{C}^1_X$ de cartes modulo $\mathcal{R}_X$ se présente naturellement ($\forall X \in \mathrm{V}$) : les *cartes localement-géodésiques* en X pour $g_{\mu\nu}$, *i.e.*, $g_{\mu\nu,\rho}(X) = 0, \quad \mu, \nu, \rho \in \{0, ..., N\}$ [B15], [A22]. Cette classe correspond bien sûr à la *connexion de Levi-Civita.*

[2] Dans ce dernier cas, on a $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ dans un système de coordonnées cartésien, mais en fait la forme particulière de la métrique $g^{\mu\nu}$ n'est pas utilisée dans le raisonnement [a2].

- supposons qu'il existe un référentiel (congruence d'observateurs) privilégié P ; alors, apparaît la classe $\mathcal{C}_X^2$ des systèmes adaptés à P et localement-géodésiques (en X) pour la métrique *spatiale* dans le référentiel P [a4].

Notons que, dans le cas d'une *métrique statique*, une telle classe $\mathcal{C}_X^2$ apparaît naturellement : les systèmes de coordonnées dans lequels $g_{\mu\nu}$ a effectivement la forme caractéristique d'une métrique statique *et* qui, de plus, sont localement-géodésiques (en X) pour la métrique spatiale dans ce "référentiel statique" [B15]. On voit déjà sur ce cas que les classes $\mathcal{C}_X^1$ et $\mathcal{C}_X^2$ sont en général distinctes : ainsi l'on obtiendra deux versions non-équivalentes de l'équation de Dirac gravitationnelle, selon qu'on aura appliqué la correspondance classique-quantique dans l'une ou l'autre classe.

2.3 Représentation tensorielle des champs de Dirac

L'équation de Dirac gravitationnelle (4) obtenue par la correspondance classique-quantique est valable sous cette forme *seulement aux points X tels que le système de coordonnées considéré appartienne à la classe* $\mathcal{C}_X^1$ (*ou* à la classe $\mathcal{C}_X^2$). Ceci est insuffisant pour utiliser l'équation, parce que, dans un espace courbe, un système de coordonnées ne peut pas être localement-géodésique dans un domaine ouvert. Il faut donc savoir réécrire l'équation (4) dans des systèmes de coordonnées plus généraux, par une transformation appropriée. Il est clair que l'on ne peut pas se contenter de transformations de Lorentz (qui d'ailleurs n'ont un sens qu'en un point donné de l'espace-temps, dans le cas d'une métrique générale). Pourtant ce sont les seules que l'on peut utiliser, si l'on se satisfait du mode usuel de transformation de l'équation de Dirac : la transformation spinorielle.

C'est ainsi que j'ai été amené à réfléchir aux modes de transformations possibles de l'équation de Dirac — dans un premier temps, *dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski* et donc avec l'exigence d'être compatible avec la relativité restreinte. J'ai trouvé [a2] que l'on peut transformer cette équation de façon *covariante* (lors d'un changement de coordonnées appartenant au groupe G), à chaque fois que l'on a un couple (G, S) — où G est un sous-groupe du groupe $\mathsf{GL}(4, \mathsf{R})$ des transformations linéaires a priori possibles, et où S est une *représentation* quelconque du groupe G dans $\mathsf{GL}(4, \mathsf{C})$. (L'italique, et non le gras, signifiera que le mot "représentation" est pris au sens mathématique précis.) J'ai identifié d'abord deux couples (G, S) possibles [a2], puis un troisième [a5], soit dans l'ordre :

- **i**. $\mathrm{G} = \mathsf{SO}^+(1, 3)$, le groupe de Lorentz propre orthochrone, S étant la *représentation* spinorielle (définie au signe près). C'est le choix fait par Dirac en 1928 et suivi depuis, qui laisse les matrices de Dirac γ^μ invariantes.

ii. Représentation tensorielle des champs de Dirac (TRD). Dans la représentation tensorielle, on a G$=$ $\mathsf{GL}(4,\mathsf{R})$, la *représentation* S étant simplement $\mathsf{S}(L) = L \quad \forall L \in$ G. Dans cette représentation, *la fonction d'ondes* $\psi = (\psi^\mu)$ *est un (4-)vecteur* [donc un tenseur $\binom{1}{0}$], et l'ensemble des composantes des quatre matrices, soit $(\gamma^\mu)^\nu{}_\rho$, est un *tenseur* $\binom{2}{1}$ [a2].

- **iii**. G $=$ $\mathsf{GL}(4,\mathsf{R})$, S étant la *représentation* triviale définie par $\mathsf{S}(L) = \mathbf{1}_4\ \forall L \in$ G. Ce dernier choix se trouve être [a5] le mode de transformation utilisé pour l'extension gravitationnelle standard de l'équation de Dirac (i.e. l'équation DFW).

Il doit être clair que le mode tensoriel **ii** est tout aussi admissible que le mode spinoriel **i** du point de vue de la relativité. En effet, un exemple archétypique de transformation relativiste est celle de l'équation de mouvement pour une particule chargée dans un champ électromagnétique — équation qui fait intervenir non pas quatre mais une matrice (celle des composantes $F^\mu{}_\nu$ du tenseur du champ), laquelle est bel et bien *non*-invariante dans une transformation de Lorentz. Aussi étonnant que cela puisse paraître, il semble bien que le mode de transformation **ii** n'ait pas été aperçu précédemment. (Voir l'introduction dans [a5].)

2.4 Equivalence des versions spinorielle et tensorielle de l'équation de Dirac dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski

Il est clair qu'avec la représentation tensorielle **ii**, les matrices de Dirac γ^μ ne sont effectivement pas invariantes par un changement de coordonnées (même si c'est une transformation de Lorentz). Mais cela ne *devrait* pas avoir de conséquence physique — car le choix d'un quadruplet (γ^μ) de matrices, parmi ceux qui vérifient la relation d'anticommutation (5), devrait être neutre physiquement. Ce dernier point est implicitement considéré comme allant de soi dans la littérature sur l'équation de Dirac. En général, on choisit une fois pour toutes un quadruplet $(\gamma^\mu_{(0)})$, vérifiant (5) avec la métrique $\eta_{\mu\nu}$. Mais on ne voit guère d'arguments pour montrer la neutralité de ce choix, à l'exception d'un travail récent de Pal, qui démontre certaines identités importantes de la théorie de Dirac dans un cadre déjà plus général que d'habitude.

Avec Frank Reifler, j'ai réalisé une étude systématique [a5] de la *mécanique quantique associée à l'équation de Dirac dans l'espace-temps plat de Poincaré-Minkowski,* dans le cadre très général d'un quadruplet quelconque (γ^μ) de matrices vérifiant l'anticommutation (5) dans un système de coordonnées "affine" quelconque — i.e., se déduisant d'un système cartésien par une transformation linéaire (plus une constante) des coordonnées. Nous avons utilisé pour cela l'outil de la *matrice hermitisante* de Bargmann et Pauli (déjà utilisée dans le travail sur les équations de Dirac gravitationnelles [a4]). La matrice A, hermitisante pour les matrices γ^μ, permet de définir le courant, et de démontrer son équation de conservation et l'*invariance* du courant par similarité [i.e., par changement du quadruplet (γ^μ) vérifiant (5)]. La matrice B, hermitisante pour les matrices α^μ (où $\alpha^0 \equiv \gamma^0/g^{00}, \;\; \alpha^j \equiv \gamma^0\gamma^j/g^{00}$), permet de définir le produit scalaire (*défini positif*) $(\psi \parallel \varphi)$ pour les fonctions d'ondes. Nous avons démontré l'existence et l'unicité (à un facteur réel près) des matrices A et B pour un ensemble quelconque de *matrices de Dirac,* i.e., pour un quadruplet quelconque (γ^μ) vérifiant l'anticommutation (5) avec une métrique $g_{\mu\nu}$ quelconque (expression de la métrique de Minkowski dans un système de coordonnées “affine” quelconque). Cette unicité entraîne celles du courant et du hamiltonien (pour un quadruplet (γ^μ) donné). Nous avons alors pu montrer que, quel que soit le quadruplet de matrices de Dirac, le hamiltonien H de Dirac est un opérateur hermitien pour ce produit scalaire et que tous les produits $(\psi \parallel \varphi)$, ainsi que tous les produits $(\mathrm{H}\psi \parallel \varphi)$, sont *invariants par similarité,* i.e. par changement des matrices de Dirac.

Ce résultat démontre la neutralité complète du choix des matrices de Dirac. Par suite, pour comparer les prédictions de l'équation de Dirac avec transformation spinorielle ou tensorielle dans un système de coordonnées cartésien au demeurant arbitraire (puisque les deux transformations rendent l'équation de Dirac covariante), on peut supposer que le quadruplet (γ^μ) est le même pour les deux théories. Leur équivalence est alors évidente, puisque dans ce système de coordonnées cartésien il s'agit pour les “deux théories” de la même équation d'ondes avec les mêmes coefficients matriciels. Ainsi, *la mécanique quantique associée à l'équation de Dirac dans l'espace-temps plat de Poincaré-Minkowski ne nécessite pas d'introduire la transformation spinorielle* [a5]. La neutralité du choix des matrices de Dirac montre de même que l'équation DFW, qui utilise le mode de transformation **iii** (*et non* le mode “spinoriel” **i**) , est équivalente à l'équation de Dirac originelle, pour la mécanique quantique dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski. Ce dernier point également est implicitement considéré comme allant de soi dans la littérature sur l'équation de Dirac.

2.5 Equation de Dirac gravitationnelle : cas d'une métrique générale

J'ai étendu à une métrique générale [a4] mon application de la correspondance classique-quantique. Comme l'a montré Bertschinger, un hamiltonien classique H (tel que celui que j'avais trouvé antérieurement dans le cas statique) peut être identifié pour le mouvement géodésique dans une métrique générale, à partir du “superhamiltonien” $\tilde{H}$. C'est une application du procédé de *réduction dimensionnelle* dans un système hamiltonien indépendant du temps (cf. Arnold, Méthodes

Mathématiques de la Mécanique Classique) — en l'occurrence, $\tilde{H}$ est indépendant du temps propre τ. Le hamiltonien H ainsi obtenu dépend du système de coordonnées utilisé : c'est simplement $H(p_j, x^k, t) = -cp_0$, où $p_\mu \equiv g_{\mu\nu} p^\nu$ avec $p^\nu \equiv m\, dx^\nu / d\tau$, qui vérifie [3]

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 c^2 = 0. \tag{6}$$

On retrouve donc la même équation de dispersion (3) que dans le cas statique, et ainsi, ici encore, la correspondance (2) appliquée après la factorisation de (3) débouche sur l'équation de Dirac (4) [a4].

Comme je l'ai indiqué après l'éq. (5), il n'est cohérent d'utiliser la correspondance (2) que dans l'une ou l'autre des deux classes de systèmes de coordonnées $\mathcal{C}^1_X$ et $\mathcal{C}^2_X$. Dans les deux cas, je considère la fonction d'ondes $\psi = (\psi^\mu)$ comme un vecteur. En effet, à la différence de la représentation usuelle par des spineurs et des matrices de Dirac invariantes, la représentation tensorielle des champs de Dirac peut être utilisée pour des changements de coordonnées quelconques dans un espace-temps plat ou courbe, à condition bien sûr de remplacer en même temps les dérivées partielles par les dérivées covariantes pour la connexion déterminée par le choix de la classe $\mathcal{C}^1_X$ ou $\mathcal{C}^2_X$. Si l'on part de la classe $\mathcal{C}^1_X$, l'équation de Dirac (4) [valable, donc, dans les systèmes de la classe $\mathcal{C}^1_X$] se réécrit de façon unique dans un système général sous la forme

$$(i\gamma^\nu D_\nu - m)\, \psi = 0, \tag{7}$$

où la dérivée covariante D_ν est basée sur la connexion de Levi-Civita. C'est l'équation "TRD-1". Si l'on part de la classe $\mathcal{C}^2_X$, on obtient dans un système général

$$(i\gamma^\nu \Delta_\nu - m)\, \psi = 0, \tag{8}$$

où Δ_ν dérive d'une connexion particulière, qui a une expression simple dans le référentiel privilégié [a4]. C'est l'équation "TRD-2". L'équation TRD-1 (7) coïncide avec l'équation de Dirac "plate" si le système de coordonnées utilisé est localement-géodésique et si, de plus, la métrique a la forme standard $\eta_{\mu\nu}$ pour l'évènement X considéré. Autrement dit, *l'équation (7) obéit au principe d'équivalence* au sens précisé par Will. Et j'ai montré qu'au contraire, ni l'équation de Dirac gravitationnelle standard ("DFW"), basée sur la "connexion de spin", ni l'équation TRD-2 (8) n'obéissent au principe d'équivalence en ce même sens

[3] avec la signature $(+---)$ que j'utilise. Avec la signature $(-+++)$ utilisée par Bertschinger, qui correspond à la métrique $g'^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}$ et à $p'_\mu = -p_\mu$, on définit de même $H'(p'_j, x^k, t) = -cp'_0$. Ainsi $H'(p'_j, x^k, t) = -H(-p'_j, x^k, t)$, ce qui donne les mêmes équations de Hamilton que $H(p_j, x^k, t)$. Notons que $H'(p'_j, x^k, t) = -cp'_0 = cp_0 = cg_{0\mu} p^\mu$, en général positif. Dans le cas statique, c'est ce $H'(p'_j, x^k)$ qui coïncide avec le hamiltonien positif que j'avais identifié pour ce cas dans le travail [B15] (voir ici la section 2.2). Ainsi, la positivité de l'énergie hamiltonienne d'une particule relativiste dépend d'une convention arbitraire.

précis [a4]. Ces trois équations : (7), (8), et DFW, sont *différentes.*

3 Mécanique quantique pour trois versions de l'équation de Dirac dans un espace-temps courbe

i. A moyen terme, les corrections apportées à l'équation de Schrödinger non-relativiste par les différentes généralisations "gravitationnelles" possibles des équations d'ondes relativistes deviendront mesurables — et donc permettront éventuellement de les départager. Pour commencer à préparer à ce moment, j'ai étudié en 2006 les états stationnaires de l'équation DFW, parce que c'est l'équation standard, pour laquelle certains problèmes ont déjà été étudiés. Ceci faisait avancer l'objectif **ii** de mon programme général.

ii. L'objectif **i** de mon programme général a été atteint, puisque j'ai proposé deux versions nouvelles de l'équation de Dirac dans un espace-temps courbe, en application de la correspondance classique-quantique. Pour compléter l'objectif **ii** du programme général, il fallait d'abord en savoir plus sur la mécanique quantique associée à ces nouvelles équations. En collaboration avec Frank Reifler, j'ai cherché depuis juillet 2007 à étendre aux deux équations de Dirac alternatives dans un espace-temps *courbe* les résultats de mécanique quantique obtenus pour le cas de l'espace-temps *plat* de Poincaré-Minkowski : la conservation du courant, la définition d'un produit scalaire rendant hermitien l'opérateur hamiltonien, et l'absence d'influence des transformations de similarité — ce dernier point montrant l'équivalence des trois modes possibles de transformation de l'équation de Dirac pour la mécanique quantique dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski. Nous avons aussi voulu comparer les réponses à ces questions que l'on obtient pour ces deux équations alternatives et pour l'équation de Dirac gravitationnelle standard, DFW. Ceci nous a amenés à étudier en détail cette dernière. La recherche dont les objectifs viennent d'être décrits occupe toute cette section, sauf la prochaine sous-section.

3.1 Etats stationnaires de l'équation de Dirac-Fock-Weyl dans le champ de gravitation terrestre

Approximation d'un champ statique [a3]. J'ai d'abord défini un produit scalaire naturel, pour lequel, dans le cas d'une métrique statique spatialement isotrope, considéré par Obukhov — et en utilisant la tétrade "diagonale", que l'on peut choisir dans ce cas —, le hamiltonien de DFW se trouve être hermitien. (Comme je l'ai vérifié directement, tandis que le raisonnement d'Obukhov passe par l'intermédiaire d'une transformation non-unitaire et d'un produit scalaire dépendant des coordonnées.) Puis j'ai obtenu l'équation exacte des états stationnaires d'un bispineur pour ce type de métrique. Enfin, en utilisant le schéma post-newtonien asymptotique pour un champ gravitationnel faible, mis au point antérieurement (voir aussi [a1]), j'en ai déduit l'équation post-newtonienne pour ces états stationnaires, sous une forme qui explicite les corrections par rapport à l'équation de Schrödinger non-relativiste dans le potentiel newtonien. Ceci m'a permis de montrer que, dans le cas des neutrons ultra-froids dans le champ de gravitation terrestre, ces "corrections relativistes" sont effectivement hors d'atteinte pour le moment [a3]. Ce résultat a depuis lors été confirmé par une étude indépendante de Boulanger, Spindel et Buisseret.

Prise en compte des effets de la rotation de la Terre [a6]. Dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe Granit, j'ai étudié les effets de la rotation de la Terre sur les états stationnaires des neutrons ultra-froids dans le champ de gravitation terrestre. Ces effets ne sont pas inclus dans le travail précédent [a3], parce que ce dernier se limite à une métrique statique, au lieu que la rotation conduit à une métrique qui est seulement stationnaire. Pour éviter de refaire le travail précédent dans un cadre plus compliqué, et en anticipant que la petitesse des *corrections relativistes* resterait vraie dans ce cas plus général (mais sans supposer à ce stade la petitesse de l'effet de la rotation), j'ai séparé les corrections relativistes en : **i**) les corrections purement gravitationnelles (celles qui seraient présentes si le champ de gravitation de la Terre était statique) et **ii**) les corrections "purement inertielles" (celles qui seraient présentes à cause de la rotation de la Terre, si la Terre ne produisait pas de champ gravitationnel). L'étude précédente montre que les premières corrections sont négligeables dans l'état actuel de la précision des mesures. Quant aux deuxièmes, on peut les évaluer à partir d'un travail de Hehl et Ni (1990). J'ai trouvé (sans surprise) que celles-ci aussi sont très petites : le seul effet qui ne soit pas inclus dans l'équation de Schrödinger non-relativiste pour la Terre tournante et qui ait une chance d'être bientôt détectable est le couplage spin-rotation — qui n'est pas une correction relativiste, mais n'est pas décrit par l'équation de Schrödinger, à cause du fait que celle-ci est scalaire.

Il restait donc à évaluer l'effet non-relativiste de la rotation, c'est à dire l'effet du terme $\delta \mathrm{H} \equiv i\hbar\boldsymbol{\omega}.(\mathbf{r} \wedge \nabla)$ dans le hamiltonien. Cet effet est proportionnel à la distance ρ à l'axe de rotation de la Terre, et au gradient de la fonction d'ondes dans la direction Est-Ouest. Je suppose qu'un calcul perturbatif au premier ordre est suffisant. Les variations de la distance ρ dans l'appareillage sont évidemment très petites par rapport à ρ, donc il semblait a priori justifié de considérer ρ comme constant. Mais la variation du niveau d'énergie δE due à la rotation de la Terre, que l'on trouve ainsi, est la même quel que soit le niveau E, donc sans signification — dans la mesure où les niveaux ne sont définis qu'à une constante près. En prenant en compte la variation de ρ (sur le conseil de V. Nesvizhevsky), je trouve que $\delta E/E$ est constant, environ 3×10^{-5} pour une vitesse des neutrons de l'ordre de 10 m/s. L'effet de la rotation de la Terre n'est donc pas négligeable, surtout pour les niveaux élevés, qui sont proches les uns des autres [a6].

3.2 Les trois équations de Dirac gravitationnelles dans un cadre commun

Une grande partie de l'étude envisagée a pu être faite simultanément pour ces trois équations, car elles ont toutes les trois la même forme :

$$\gamma^\mu D_\mu \psi = -im\psi, \tag{9}$$

où $\gamma^\mu = \gamma^\mu(X)$ $(\mu = 0, ..., 3)$ est un champ de matrices complexes 4×4 définies sur l'espace-temps V [muni d'une métrique lorentzienne $g_{\mu\nu}$, de matrice inverse $(g^{\mu\nu})$], tel que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\, \mathbf{1}_4, \quad \mu, \nu \in \{0, ..., 3\} \quad (\mathbf{1}_4 \equiv \mathrm{diag}(1,1,1,1)); \tag{10}$$

où ψ est un champ de *bispineurs* pour l'équation standard, *DFW* , mais est un champ de **4-vecteurs** pour les deux équations alternatives [a4], basées sur la représentation tensorielle des champs de Dirac (ci-après *"TRD"*) [a2, a5];

et où D_μ est une dérivée covariante, associée à une *connexion* spécifique, une pour chacune des trois équations :

- Pour les deux équations alternatives (TRD) obtenues par la correspondance classique-quantique, c'est une connexion (réelle) sur le fibré tangent TV, étendue au complexifié $\mathrm{T}_{\mathsf{C}}\mathrm{V}$.
  - Pour l'une des deux équations TRD (TRD-1), c'est la connexion de Levi-Civita, associée à la métrique d'espace-temps $g_{\mu\nu}$. C'est cette équation qui obéit au principle d'équivalence.
  - Pour TRD-2, la connexion est définie à partir de la connexion de Levi-Civita *spatiale* dans un *référentiel privilégié* postulé [a4].
- Pour l'équation standard (DFW), on utilise la "connexion de spin" sur le fibré des bispineurs. Elle *dépend des matrices* γ^μ, et elle est généralement complexe.

3.3 Définition du champ de matrices de Dirac

Pour DFW, on définit

$$\gamma^\mu(X) = a^\mu{}_\alpha(X)\ \gamma^{\sharp\alpha}, \tag{11}$$

où $u_\alpha = a^\mu{}_\alpha(X)\,\partial_\mu$ est un champ de tétrades (orthonormales) (∂_μ est la base naturelle associée aux coordonnées x^μ) et ($\gamma^{\sharp\alpha}$) est un quadruplet de matrices de Dirac "plates", i.e., une solution constante de la relation d'anticommutation (10) avec $(g^{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) \equiv \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. On doit pouvoir utiliser *tout* choix possible des ($\gamma^{\sharp\alpha}$). On doit étudier l'influence des deux choix : ($\gamma^{\sharp\alpha}$) et (u_α), mais la littérature est à peu près muette sur ce point.

Pour TRD, on peut également utiliser un champ de tétrades, mais il y a aussi d'autres possibilités comme le transport parallèle [a4].

Pour pouvoir utiliser n'importe quel champ possible (γ^μ) de matrices de Dirac, il faut recourir à la *matrice hermitisante* A déjà mentionnée. C'est une matrice complexe 4×4 telle que

$$A^\dagger = A, \qquad (A\gamma^\mu)^\dagger = A\gamma^\mu \quad \mu = 0, ..., 3, \tag{12}$$

où $M^\dagger \equiv M^{*T}$ = conjugué hermitien de la matrice M. Nous avons prouvé [a5] l'existence de A, ainsi que celle de B—une matrice hermitisante définie-positive pour les matrices α^μ. En général, $A = A(X)$ est aussi un champ. Toutefois, lorsqu'on définit le champ (γ^μ) par une tétrade, éq. (11), on peut prendre $A \equiv A^\sharp$, où $A^\sharp$ est une matrice hermitisante (constante) pour le quadruplet constant ($\gamma^{\sharp\alpha}$). De plus, pour DFW, on considère en pratique seulement des quadruplets ($\gamma^{\sharp\alpha}$) tels que $\gamma^{\sharp 0}$ soit une matrice hermitisante. Ainsi, en pratique,

$$\underline{A(X) = \gamma^{\sharp 0} = \text{constante pour DFW.}} \tag{13}$$

3.4 Condition de conservation du courant, équation de Dirac modifiée

Dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski, le courant est défini sans ambiguïté [a5]:

$$J^\mu = \psi^\dagger A \gamma^\mu \psi. \tag{14}$$

Cette définition est généralement-covariante, le courant étant un *4-vecteur,* pour TRD aussi bien que pour DFW. Donc elle reste valable pour un espace-temps courbe $(\mathrm{V}, g_{\mu\nu})$. (Alors, γ^μ, A dépendent de $X \in \mathrm{V}$.) Le courant (14) est *indépendant du choix du champ de matrices de Dirac :* si l'on passe d'un champ

(γ^μ) à un autre $(\tilde{\gamma}^\mu)$, le deuxième se déduit du premier par une *transformation de similarité locale :*

$$\exists S = S(X) \in \mathsf{GL}(4, \mathsf{C}) : \qquad \tilde{\gamma}^\mu(X) = S^{-1}\gamma^\mu(X)S, \quad \mu = 0, ..., 3. \tag{15}$$

[Le nouveau champ $(\tilde{\gamma}^\mu)$ vérifie la relation d'anticommutation (10) avec la *même* métrique $g_{\mu\nu}$ que le premier, (γ^μ).] En faisant simultanément les transformations $\tilde{\psi} = S^{-1}\psi$ et $\tilde{A} = S^\dagger AS$ [cette dernière respectant le choix (13) fait pour DFW, pourvu que S soit admissible], ceci laisse le courant invariant [a5, a7]. La *condition de conservation du courant* est spécifiée par les résultats suivants [a7] :

Théorème. *Considérons l'équation de Dirac générale (9) dans un espace-temps courbe — donc, soit DFW, soit l'une des deux équations TRD. Pour que toute solution* ψ *de (9) satisfasse la conservation du courant :* $D_\mu J^\mu = 0$*, il faut et il suffit que*

$$D_\mu(A\gamma^\mu) = 0. \tag{16}$$

Corollaire. *Pour DFW, on peut prendre pour matrice hermitisante* $A(X)$ *la matrice constante* $A^\sharp$*, i.e., une matrice hermitisante pour les matrices de Dirac "plates"* $\gamma^{\sharp\alpha}$ *de l'éq. (11). Alors la condition (16) est satisfaite, et la conservation du courant est ainsi vraie pour toute solution de l'équation DFW.*

La conservation du courant affirmée dans la littérature est le cas particulier $A = \gamma^{\sharp 0}$ [éq. (13)] du corollaire. Lorsque la condition (16) du théorème est satisfaite, l'équation de Dirac (9) dérive du lagrangien (dû à F. Reifler) [a8]

$$l = \sqrt{-g}\ \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^\mu(D_\mu\psi) - \left(\overline{D_\mu\psi}\right)\gamma^\mu\psi + 2im\overline{\psi}\psi\right], \tag{17}$$

avec $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger A$ et $\overline{D_\mu\psi} \equiv (D_\mu\psi)^\dagger A$. Ce lagrangien généralise le "lagrangien de Dirac" de la littérature. [Ce dernier, valable pour DFW, correspond au cas particulier $A = \gamma^{\sharp 0}$.] L'équation d'Euler-Lagrange dérivant de (17) est, dans le cas général, "l'équation de Dirac modifiée" (due également à F. Reifler) :

$$\gamma^\mu D_\mu\psi = -im\psi - \frac{1}{2}A^{-1}(D_\mu(A\gamma^\mu))\psi. \tag{18}$$

Elle coïncide avec l'équation de Dirac (9) quand la condition (16), assurant la conservation du courant pour les solutions de (9), est satisfaite. En vertu du corollaire, c'est toujours le cas pour DFW. Mais, que cette condition (16) soit satisfaite ou non, la conservation du courant est *toujours* vraie [a7] pour les solutions de (18). Cette équation représente donc la bonne généralisation de (9) pour TRD. En pratique il faut l'utiliser (pour TRD) [a8] : en effet, pour utiliser (9), il faudrait que les "champs coefficients" (γ^μ, A) vérifient la condition (16), qui représente un système non-trivial d'équations aux dérivées partielles pour ces champs.

3.5 Produit scalaire, hermiticité du hamiltonien

i) L'opérateur hamiltonien dépend du référentiel. L'équation de Dirac se met sous la forme de l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{H}\psi, \qquad (t \equiv x^0, \quad \hbar = 1), \tag{19}$$

faisant apparaître l'opérateur hamiltonien H. Par exemple, pour l'équation de Dirac non modifiée (9), on a :

$$\mathrm{H} \equiv m\alpha^0 - i\alpha^j D_j - i(D_0 - \partial_0), \tag{20}$$

où

$$\alpha^0 \equiv \gamma^0/g^{00}, \qquad \alpha^j \equiv \gamma^0\gamma^j/g^{00}. \tag{21}$$

(Le hamiltonien de l'équation de Dirac modifiée (18) contient un terme supplémentaire [a8].) Pour que les hamiltoniens H et H', avant et après un changement de la carte χ (système de coordonnées local), soient équivalents comme opérateurs, le changement de carte doit être *purement spatial* [a7] : $x'^0 = x^0,\ x'^j = f^j((x^k))$ — alors, les deux membres de l'équation de Schrödinger (19) sont "scalaires" pour DFW, et "vectoriels" pour TRD. Ainsi, H *dépend du référentiel* considéré. Cette dépendance est valable pour toutes les équations d'ondes. Il s'agit d'un fait plus précis que l'affirmation usuelle selon laquelle l'équation de Schrödinger nécessite de décomposer l'espace-temps en le produit espace $\times$ temps (et peut donc dépendre de cette décomposition).

Pour les besoins de cette étude, j'ai proposé une formalisation de la notion de *référentiel* général dans un espace-temps courbe. En gros, on entend par là une congruence tridimensionnelle de lignes d'univers (celles des "observateurs" liés au référentiel). Ma proposition consiste à définir un référentiel comme une classe d'équivalence F de cartes modulo les changements $x'^0 = x^0,\ x'^j = f^j((x^k))$ [a7]. [La congruence d'observateurs ne changerait pas si l'on autorisait une dépendance $x'^0 = g(x^0, (x^k))$ mais, lorsqu'on étudie un hamiltonien quantique H, il est préférable de fixer la coordonnée de temps, car H est influencé par elle.] Disons alors d'une ligne d'univers l qu'elle est "liée à F" si, dans une carte $\chi \in \mathrm{F}$, tous les points de l ont les mêmes coordonnées spatiales x^j (ceci est alors vrai $\forall\, \chi \in \mathrm{F}$). On peut associer à chaque référentiel une variété "espace" M, ensemble des lignes d'univers liées à F (M est équipé naturellement d'une structure de variété différentielle).

ii) Condition d'hermiticité du hamiltonien. Tout comme le hamiltonien en dépend, l'espace des états quantiques dépend aussi du référentiel — et même, a priori, du temps $t \equiv x^0$ dans ce référentiel. Ainsi, le produit hilbertien pourrait a priori inclure une "forme volume" assez générale sur la variété "espace" M associée au référentiel considéré. Néanmoins, le produit hilbertien est fixé par le résultat suivant [a7] :

Théorème. *Une condition* nécessaire *pour que le produit hilbertien de deux fonctions d'ondes indépendantes de* t *soit indépendant de* t *et que de plus le hamiltonien* H *soit un opérateur hermitien, est que ce produit scalaire ait la forme*

$$(\psi \mid \varphi) \equiv \int \psi^\dagger A \gamma^0 \varphi \sqrt{-g} \, \mathrm{d}^3\mathbf{x}, \qquad g \equiv \det(g_{\mu\nu}). \tag{22}$$

Les deux propriétés pour lesquelles ce théorème donne une condition nécessaire sont des axiomes de base de la mécanique quantique. On peut donc dire que la mécanique quantique fixe la forme précise du produit hilbertien. Le produit scalaire considéré dans la littérature (qui concerne DFW) est, à nouveau, le cas particulier $A = \gamma^{\sharp 0}$ [éq. (13)].

La condition d'hermiticité du hamiltonien de Dirac pour ce produit scalaire est la suivante [a7, a8] :

Théorème. *Soit un champ de coefficients* (γ^μ, A) *tel que* γ^μ *soit "admissible", i.e., vérifie la relation d'anticommutation (10).* [4] *Pour que le hamiltonien de Dirac (20) soit hermitien pour le produit scalaire (22), il faut et il suffit que*

$$\partial_0 \left(\sqrt{-g} \, A \gamma^0 \right) = 0. \tag{23}$$

J'ai trouvé avec étonnement que, pour l'équation standard (DFW), la validité de cette condition dépend du champ de coefficients (γ^μ, A) admissible. (Nous avons vu ensuite que c'est vrai également pour TRD.)

iii) Instabilité de l'hermiticité par les similarités locales (DFW). Pour DFW, dans des coordonnées très générales, on peut partir d'un champ de tétrades $(a^\mu{}_\alpha)$ vérifiant $a^0{}_j = 0$. En prenant pour matrices "plates" $\gamma^{\sharp \alpha}$ des matrices standard, compatibles avec (13), la condition d'hermiticité (23) de H se réduit alors à la condition de Leclerc (2006) :

$$\partial_0 (\sqrt{-g \, g^{00}}) = 0. \tag{24}$$

Mais, après une similarité locale $S(X)$, la condition (23) devient [a7]

$$\partial_0 (\sqrt{-g \, g^{00}} \, S^\dagger S) = 0, \tag{25}$$

laquelle ne peut clairement *pas* être satisfaite si (24) l'est, et si de plus $S^\dagger S = F(t)$ — ce qui est vérifié par *la plupart* des similarités admissibles.

[4] Si l'on considère l'équation de Dirac non modifiée (9) et dans la version "TRD", on doit demander en outre à un champ (γ^μ, A) "admissible" de vérifier la condition (16) [a7].

4 Non-unicité de chaque équation de Dirac gravitationnelle

4.1 Similarités admissibles

Dans un espace-temps donné, on passe d'un champ γ^μ de matrices de Dirac à un autre par une similarité locale. Dans notre travail sur le hamiltonien de Dirac, ce qu'on demande à ces transformations [en plus de laisser invariante la relation d'anticommutation (10)] est simplement d'être compatibles avec la forme postulée pour le champ γ^μ. *Pour DFW,* γ^μ est donné par une tétrade. Les similarités locales admissibles S sont donc, en principe, celles qui résultent d'un changement du champ de tétrades par une transformation de Lorentz locale (différentiable) *quelconque,* $X \mapsto L(X) \in \mathsf{SO}(1,3)$. Elles s'écrivent $S(X) = \pm\mathsf{S}(L(X))$ où S est la *représentation* spinorielle, définie au signe près [a7]. [5] *Pour DFW, les similarités locales admissibles sont donc les applications différentiables* S *de l'espace-temps* V *dans le groupe de spin* $\mathsf{Spin}(1,3)$. *Pour TRD,* aucune forme particulière n'est imposée à γ^μ, donc *toutes* les similarités locales [les applications différentiables $X \mapsto S(X) \in \mathsf{GL}(4,\mathsf{C})$] sont admissibles, si l'on utilise l'équation de Dirac modifiée.

Il n'est pas nécessaire a priori que les similarités locales laissent l'équation d'ondes (de Dirac) covariante, car le problème envisagé est celui de l'influence du choix du champ γ^μ sur le hamiltonien et sur le spectre énergétique. Autrement dit, les équations d'ondes correspondant à deux choix admissibles γ^μ et $\tilde{\gamma}^\mu$ peuvent ne pas être équivalentes — et c'est effectivement le cas général pour TRD [a7]. Mais chacune d'elles dérive du lagrangien (17) et possède un courant conservé. Toutefois, pour DFW, il se trouve que les similarités admissibles laissent l'équation de Dirac covariante : la connexion de spin a été construite précisément pour cela.

4.2 Condition d'invariance du hamiltonien par une similarité locale (DFW)

On cherche quand une similarité locale $S(X)$, appliquée au champ des matrices

[5] Ceci suppose, comme on le suppose implicitement dans la littérature qui ne relève pas des mathématiques pures, qu'on peut "se débarrasser du signe $\pm$". I.e., ceci suppose la validité de la propriété suivante : "toute application différentiable L de l'espace-temps V dans le groupe non simplement connexe $\mathsf{SO}(1,3)$ peut être "relevée" en une application différentiable S de V dans $\mathsf{Spin}(1,3)$, telle que $\forall X \in \mathrm{V},\quad \Lambda(S(X)) = L(X)$ ". [Ici $\Lambda : \mathsf{Spin}(1,3) \to \mathsf{SO}(1,3)$ est le revêtement à deux feuillets de $\mathsf{SO}(1,3)$.] Cette propriété n'est pas nécessairement vraie si l'espace-temps V n'est pas simplement connexe (Isham, 1978). Quand la propriété énoncée cidessus n'est pas vraie, *l'équation d'ondes* (DFW) n'est pas unique, i.e., elle n'est pas covariante par tous les changements de tétrade. Ce problème de non-unicité d'origine topologique est totalement différent de celui que nous étudions : la non-unicité des *opérateurs* hamiltonien et énergie. Celle-ci, au contraire, se voit d'autant plus clairement que la topologie est plus triviale.

de Dirac γ^μ, laisse H [éq. (20)] invariant :

$$\tilde{\mathrm{H}} = S^{-1}\,\mathrm{H}\,S. \tag{26}$$

C'est un calcul simple. Pour DFW, les matrices de la connexion de spin, $\Gamma_\mu \equiv D_\mu - \partial_\mu$, changent selon :

$$\tilde{\Gamma}_\mu = S^{-1}\Gamma_\mu S + S^{-1}(\partial_\mu S). \tag{27}$$

On trouve simplement que, pour avoir (26), il faut et il suffit que $S(X)$ ne dépende pas du temps, $\partial_0 S = 0$. Dans le cas général $g_{\mu\nu,0} \neq 0$, tous les champs possibles γ^μ dépendent de t. Il semble impossible de trouver même une classe particulière de champs γ^μ qui s'échangeraient par des similarités locales vérifiant $\partial_0 S = 0$. I.e.: **le hamiltonien de Dirac n'est pas unique.** Ceci est vrai aussi pour TRD [a8].

4.3 Condition d'invariance de l'opérateur Energie (DFW)

Lorsque l'opérateur hamiltonien H n'est pas hermitien, le spectre énergétique pertinent est celui de l'opérateur énergie E. Celui-ci est l'opérateur dont la valeur moyenne est l'énergie du champ, définie de la façon usuelle à partir du lagrangien, cf. Leclerc (2006). Leclerc a montré que, pour DFW [avec le choix $A = \gamma^{\sharp 0}$, éq. (13)], l'opérateur E coïncide avec la partie hermitienne de H. Ce résultat s'étend [a8] à l'équation de Dirac générale, TRD comme DFW, quel que soit le choix fait pour le champ hermitisant $A(X)$:

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} + \frac{i}{2\sqrt{-g}}\,B^{-1}\,\partial_0\left(\sqrt{-g}\,B\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{H} + \mathrm{H}^\ddagger\right),\ \ B \equiv A\gamma^0, \tag{28}$$

où $\mathrm{H}^\ddagger$ est l'adjoint de H relativement au produit scalaire (22). A nouveau, un calcul simple donne la condition d'invariance de E (pour DFW) :

$$\left[B(\partial_0 S)S^{-1}\right]^a = 0, \tag{29}$$

où $M^a \equiv \frac{1}{2}(M - M^\dagger)$ est la partie antihermitienne d'une matrice M. Les similarités locales $S(X)$ vérifiant (29) sont très particulières. Il y a donc un problème d'unicité sérieux pour DFW (et aussi pour les équations alternatives, TRD). C'est ce qui m'a amené à penser que le spectre lui-même devait être non-unique.

4.4 Non-unicité du spectre énergétique de Dirac

Effectivement, le *spectre* de l'opérateur énergie E n'est pas unique — même pour un référentiel donné dans un espace-temps donné, et même si cet espace-temps est l'espace-temps plat de Poincaré-Minkowski. [6] Plus précisément :

Théorème. *Considérons DFW et l'équation de Dirac (9) [resp. considérons TRD et l'équation de Dirac modifiée (18)] dans un système de coordonnées fixé. Supposons que, dans ce système, la métrique $g_{\mu\nu}$ vérifie $g_{00} > 0$, et que la métrique spatiale $h_{jk} \equiv -g_{jk}$ soit définie positive. Supposons aussi $m > 0$ dans l'équation de Dirac. Pour tout champ de matrices de Dirac γ^μ [resp. pour tout champ (γ^μ, A)], il existe une similarité admissible S telle que les spectres des opérateurs E et $\widetilde{\mathrm{E}}$ avant et après la similarité soient différents.*

Comme ce résultat est passablement surprenant, je vais résumer, pour DFW, la preuve que nous en avons donnée dans [a8].

Expression explicite de l'opérateur Energie (DFW). L'expression du changement de E après une similarité locale S, soit $\delta\mathrm{E} \equiv S\tilde{\mathrm{E}}S^{-1} - \mathrm{E}$, est facile à obtenir [a8]. Supposons à nouveau, pour simplifier (comme on le fait presque toujours dans la littérature, et comme on peut le faire sous les hypothèses du théorème), que la tétrade qui définit le champ initial de matrices de Dirac γ^μ vérifie ${a^0}_j = 0$. On a alors :

$$\delta\mathrm{E} = -i\left[(\partial_0 S)S^{-1}\right]^a. \tag{30}$$

(L'opérateur $\delta\mathrm{E}$ est la prémultiplication par la matrice hermitienne *dépendant du point* X, qui figure au second membre.) Or, lorsque S est une similarité admissible quelconque, $(\partial_0 S)S^{-1}$ est l'élément générique de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de $\mathsf{Spin}(1,3)$. Les six matrices $s^{\alpha\beta} \equiv [\gamma^{\sharp\alpha}, \gamma^{\sharp\beta}]$ $(\alpha < \beta)$ forment une base de $\mathcal{G}$, vu comme un espace vectoriel réel. Ainsi $\delta\mathrm{E} = -i\left[\omega_{\alpha\beta}s^{\alpha\beta}\right]^a$ et, en fonction de la similarité admissible S, les six réels $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ dépendent arbitrairement de $X \in \mathrm{V}$. En utilisant les propriétés des matrices standard $\gamma^{\sharp\alpha}$, on peut simplifier ceci sous la forme

$$\delta\mathrm{E} = -i\sum_{j,k=1}^{3}\omega_{jk}s^{jk}. \tag{31}$$

Cas où les matrices de Dirac sont les matrices chirales. Si les matrices de Dirac $\gamma^{\sharp\alpha}$ sont les matrices "chirales", on obtient en utilisant leur forme et (31) :

$$\delta\mathrm{E} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \qquad N \equiv -\frac{1}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma} \tag{32}$$

[6] Pour l'espace-temps de Poincaré-Minkowski, on peut imposer que les matrices de Dirac soient constantes en coordonnées cartésiennes, mais ceci ne résout le problème qu'en coordonnées cartésiennes ou affines. Ainsi, même ce choix contraire aux préceptes de l'invariance de jauge laisse le problème entier dans un référentiel non-inertiel.

où $\vec{\theta} \equiv (\theta^k)$ avec $\theta^1 \equiv \omega_{23}$ (circulaire), et où $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_k)$, les σ_k étant les matrices de Pauli. En fonction des trois réels $\omega_{jk},\ 1 \leq j < k \leq 3$ (qui dépendent arbitrairement de $X \in \mathrm{V}$), la matrice N parcourt *toutes* les matrices hermitiennes 2×2 de trace nulle. Une telle matrice a deux valeurs propres $\mu \in \mathsf{R}$ et $-\mu$, et possède une base orthogonale de vecteurs propres, resp. $u \in \mathsf{C}^2$ pour μ et v pour $-\mu$.

Non-unicité du spectre (DFW). Une modification des matrices de Dirac initiales γ^μ par une similarité locale $S(\epsilon)$ proche de l'identité modifie chaque valeur propre de E selon la formule classique $\delta\lambda = (\psi \mid \delta\mathrm{E}(\epsilon)\psi) + O(\epsilon^2)$, où ψ est la fonction propre non perturbée. Avec (32) et en décomposant ψ en deux fonctions complexes à deux composantes : $\psi = (\phi, \chi)$, on trouve :

$$\delta\lambda = \int \psi^\dagger \delta\mathrm{E}\, \psi\ \underline{\sqrt{-g\, g^{00}}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}} = \int (\phi^\dagger N \phi + \chi^\dagger N \chi)\ \underline{\mathrm{d}\mathsf{V}}. \tag{33}$$

Fixons un $\mu > 0$ et l'instant t. Pour tout point x de la variété espace M, soit $N = N(x)$ t.q. $\phi(x)$ soit vecteur propre de $N(x)$ pour la valeur propre μ, d'où

$$\phi^\dagger N \phi = \mu\ \phi^\dagger \phi, \quad \chi^\dagger N \chi \geq -\mu\ \chi^\dagger \chi. \tag{34}$$

L'inégalité ne devient une égalité que si $\chi(x) \perp \phi(x)$ dans C^2. Ainsi $\delta\lambda > 0$ sauf si i) $\chi(x) \perp \phi(x)$ p.p. $x \in \mathrm{M}$ *et* ii) $\int \phi^\dagger \phi\ \mathrm{d}\mathsf{V} = \int \chi^\dagger \chi\ \mathrm{d}\mathsf{V}$. Ceci est pratiquement impossible. Déjà i) seul entraîne que le courant J^μ est du genre lumière p.p. $x \in \mathrm{M}$, ce qui *est* impossible (Reifler & Morris, 2005) si $m > 0$. cqfd.

5 Perspectives

Le problème de non-unicité découvert réside dans le fait que : i) le hamiltonien de Dirac, H, n'est pas invariant par toutes les similarités admissibles (i.e. : H n'est pas invariant par tous les changements admissibles du champ de matrices de Dirac γ^μ) ; ii) qu'il en va de même pour l'opérateur énergie, E ; et iii) que même le *spectre* de E n'est pas unique. Il y a donc en fait trois problèmes de non-unicité distincts. Ces résultats de non-unicité s'appliquent aussi bien à la version standard de l'équation de Dirac gravitationnelle, "DFW", qu'aux deux versions alternatives TRD-1 et TRD-2 que j'ai proposées dans cette période. La partie **ii** de mon programme général reste d'actualité, mais je ne peux évidemment plus la mener à bien sans traiter préalablement ces problèmes d'une façon ou d'une autre. Trois questions se posent naturellement.

5.1 Limite non-relativiste et non-unicité de la théorie de Dirac

Qu'en est-il des opérateurs hamiltonien et énergie à la limite non-relativiste ? La non-unicité de ces opérateurs est-elle encore vraie à cette limite ? S'il en était ainsi, ce serait très grave, puisque la théorie non-relativiste elle-même prévoit des effets non-ambigus, qui concernent précisément le spectre énergétique — tels l'effet "COW" et l'effet Sagnac — et que ces effets ont été vérifiés expérimentalement. On aurait donc un échec patent de la théorie de Dirac dans un champ de gravitation, au moins dans son état actuel. Heureusement, F. Reifler et moi savons déjà que ce n'est pas le cas ; les résultats correspondants, qui demandent encore à être complétés, seront décrits dans un prochain rapport.

5.2 Conséquences de l'étude en théorie des champs

A ma connaissance, les seules confirmations expérimentales directes de l'interaction entre gravitation et théorie quantique sont les effets du champ de gravitation classique sur les particules quantiques, mentionnés au début de ce rapport. Je rappelle que ces effets sont correctement prévus, à la précision actuelle, par l'équation de Schrödinger non-relativiste avec le potentiel newtonien. Bien entendu, il s'agit de l'équation de Schrödinger pour une particule, donc d'états quantiques à une particule. Ceci me paraît justifier amplement le fait que les travaux décrits dans ce rapport aient été limités à la "première quantification", i.e. à l'équation de Dirac elle-même, dont les solutions sont les états à une particule du champ (quantique) de Dirac. Néanmoins, ces états à une particule permettent en principe de définir l'opérateur du champ de Dirac dans l'espace-temps courbe considéré. La non-unicité de l'opérateur E (valable dans un espace-temps courbe, et même dans l'espace-temps plat, au moins en référentiel non-inertiel : voir la note au bas de la page indiquée) entraîne celle du hamiltonien du champ de Dirac, et donc entraîne la non-unicité de cette théorie de champ. Il serait bon de préciser ce point.

5.3 Enjeu d'une solution au problème de non-unicité de la théorie de Dirac

Je terminerai en essayant d'esquisser la situation où le problème de non-unicité laisserait la mécanique quantique dans un champ de gravitation (indépendamment des ramifications du problème en théorie des champs), si une solution rigoureuse n'était pas trouvée. J'ai indiqué qu'à la limite non-relativiste, ce problème disparaît, sans doute assez complètement. La non-unicité disparaît également, "en pratique", si le champ de gravitation est constant dans le référentiel considéré, i.e., si la métrique est indépendante de la coordonnée de temps : $g_{\mu\nu,0} = 0$. En effet, dans ce cas, on peut choisir un champ de matrices de Dirac γ^μ indépendant du temps également, et cela semble "naturel". Or, pour l'équation standard (DFW), tous ces champs donnent le même opérateur H, d'ailleurs égal dans ce cas à l'opérateur E. Notons que ce cas inclut non seulement le cas "statique", mais aussi celui d'une rotation à vitesse constante. Ces cas (limite non-relativiste ou métrique indépendante du temps) sont importants comme schématisations approchées de situations rencontrées en pratique. Ils suggèrent qu'à moins de "le faire exprès", deux choix "raisonnables" du champ de matrices de Dirac devraient conduire à des différences très petites sur les spectres énergétiques. Néanmoins, outre le fait que ceci est clairement insuffisant d'un point de vue théorique, il semble difficile d'en être sûr tant que l'on ne dispose pas d'une prescription pour le cas général ($g_{\mu\nu,0} \neq 0$). Celui-ci reste tout de même le cas réel. Par exemple, qu'est-ce qui interdirait de choisir l'une ou l'autre parmi deux tétrades tournant à une vitesse arbitrairement grande l'une par rapport à l'autre — fournissant deux choix de coefficients entre lesquels la différence du spectre énergétique serait arbitrairement grande ?

6 Publications depuis 2006

N.B.: lorsqu'il n'y a pas de liste d'auteurs, je suis le seul auteur de ces articles.

6.1 Revues à comité de lecture

[a1] "Space isotropy and weak equivalence principle in a scalar theory of gravity", *Brazilian Journal of Physics* **36**, 177–189 (2006).

[a2] "Dirac equation from the Hamiltonian and the case with a gravitational field", *Foundations of Physics Letters* **19**, 225–247 (2006).

[a3] "Post-Newtonian equation for the energy levels of a Dirac particle in a static metric", *Physical Review D* **74**, 065017 (2006), 9 pages.

[a4] "Dirac-type equations in a gravitational field, with vector wave function", *Foundations of Physics* **38**, 1020–1045 (2008).

[a5] M. ARMINJON, F. REIFLER, "Dirac equation: Representation independence and tensor transformation", *Brazilian Journal of Physics* **38**, 248–258 (2008).

[a6] "Main effects of the Earth's rotation on the stationary states of ultra-cold neutrons", *Physics Letters A* **372**, 2196–2200 (2008).

[a7] M. ARMINJON, F. REIFLER, "Basic quantum mechanics for three Dirac equations in a curved spacetime", soumis pour publication.

[a8] M. ARMINJON, F. REIFLER, A non-uniqueness problem of the Dirac theory in a curved spacetime, soumis pour publication.

6.2 Actes de colloques à comité de lecture

[b1] "Equations of motion according to the asymptotic post-Newtonian scheme for general relativity", 3rd Advanced Research Workshop *"Gravity, Astrophysics and Strings at the Black Sea"* (Kiten, Bulgarie, 13-20 juin 2005), *Proceedings* (P. Fiziev & M. Todorov, eds.), St. Kliment Ohridski University Press (2006), pp. 1-9.

[b2] M. NAJIB, M. ARMINJON, H. SMAOUI, "Stochastic Homogenization of a Two-Dimensional Granular Medium", *Proceedings of the Third International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics* (Tunis, décembre 2006) (à paraître).

[b3] " Quantum wave equations in curved space-time from wave mechanics", texte d'une communication orale à la conférence "Symmetry and Perturbation Theory", 2-9 juin 2007, Otranto (Italie). Paru dans *Symmetry and Perturbation Theory, Proc. of the International Conference SPT 2007* (G. Gaeta, Raff. Vitolo and S. Walcher, eds), World Scientific (2007), pp. 239-240.

[b4] M. Arminjon, F. Reifler, "Quantum mechanics for three versions of the Dirac equation in a curved spacetime", texte d'une communication orale à la 11ème Conf. Int. "Physical Interpretations of Relativity Theory", Imperial College, London, 12-15 sept. 2008.

[b5] M. Arminjon, F. Reifler, "Non-uniqueness of the Dirac theory in a curved spacetime", texte d'une communication orale à la 1ère "Mediterranean Conference on Classical and Quantum Gravity" (Kolymbari, Crète, Grèce, 14-18 sept. 2009), soumis aux Actes.

6.3 Séminaires, workshops

[s1] "Two gravitational Dirac equations", communication au Workshop *"Resonance Transitions Between Gravitationally Bound Quantum States of Neutrons"*, LPSC, Grenoble, 6-7 avril 2006.

[s2] “Dirac equation in a gravitational field: wave mechanics vs. equivalence principle”, *Seminars of the Theoretical Physics Group*, Università di Bari, INFN Bari, et Politecnico di Bari, 23 mai 2006.

[s3] “L’équation de Dirac : obtention, transformation, cas gravitationnel”, conférence au CITV (“Colloque International de Théories Variationnelles”, Aix-en-Provence, 31 août – 4 sept. 2009, C. Vallée, org.).

[s4] “Equations de Dirac dans un espace-temps courbe : Mécanique quantique”, conférence au CITV (“Colloque International de Théories Variationnelles”, Aix-en-Provence, 31 août – 4 sept. 2009, C. Vallée, org.).