Mécanique quantique dans un champ de gravitation, Juin 2005-Septembre 2007

Mayeul Arminjon

Laboratoire "Sols, Solides, Structures, Risques",

UMR 5521 CNRS/ Université Joseph Fourier/ Institut National Polytechnique de Grenoble,

BP 53, F-38041 Grenoble cedex 9, France.

Table des matières

1 Bref bilan de mes travaux antérieurs en physique théorique

Mes travaux antérieurs en physique théorique ont été centrés sur une théorie relativiste scalaire de la gravitation avec un référentiel privilégié, cf. mon bilan précédent. Comme je le rappelais dans ce document (au point A2.1), la présence d'un référentiel privilégié est reconnue, par ex. par Butterfield et Isham, comme une possibilité pour résoudre les problèmes à l'interface entre gravitation et théorie quantique, et singulièrement pour résoudre le "problème du temps" [en gros : la théorie quantique a besoin d'un temps privilégié, en quelque sorte indépendant des processus physiques (ce n'est pas un opérateur, par exemple), alors que la relativité générale fournit une infinité de coordonnées temporelles interchangeables]. Certes, cette possibilité n'est pas celle que ces auteurs privilégient, mais c'en est une qui fournirait une solution simple si l'on savait résoudre la difficulté qui saute aux yeux : celle de construire une théorie de la gravitation avec un référentiel privilégié et qui s'accorde avec les observations. [1] J'ai beaucoup travaillé sur ma théorie scalaire et sur son test observationnel, et je pense qu'un certain nombre de points sont acquis [a1]. Un prolongement de ce travail a été l'application à la mécanique céleste de la relativité générale du schéma post-newtonien asymptotique mis au point pour la théorie scalaire. Cette application m'a conduit à proposer un terme supplémentaire, dû à la rotation propre du corps considéré, dans les équations de Lorentz-Droste (dites aussi d'Einstein-Infeld-Hoffmann) [a2, b1]. L'analyse des conséquences de ce terme, aussi bien que la poursuite du test de la théorie scalaire, ne pourraient guère être effectuées que dans le cadre d'une collaboration avec des observateurs et des expérimentateurs, qu'il ne me serait pas aisé de lancer dans le contexte où j'effectue ma recherche.

2 Motivation

Dans cette situation, il m'est apparu approprié de *réorienter mes recherches* vers la mécanique quantique relativiste dans un espace-temps courbe. Ceci, principalement dans le but d'examiner quelles sont les différentes écritures possibles de cette mécanique quantique – notamment pour confirmer ou infirmer la thèse énoncée ci-dessus, en regardant si la présence d'un référentiel privilégié rend effectivement plus facile ou plus naturel d'écrire cette mécanique quantique. Et aussi, pour déterminer si ces différentes écritures possibles peuvent être départagées expérimentalement.

En effet, le sujet de la mécanique quantique dans un champ de gravitation n'est plus un sujet vierge expérimentalement : en plus des expériences d'interférométrie neutronique (Colella-Overhauser-Werner, années 70) et atomique (Kasevich-Chu, Riehle-Bordé et al., années 90), il y a maintenant les mesures de la transmission de neutrons ultra-froids par une fente horizontale, réalisées à l'Institut Laue-Langevin (Grenoble), mesures qui permettent de vérifier la quantification de l'énergie de ces neutrons dans le champ de pesanteur terrestre. Il est frappant de constater que l'interprétation de toutes ces expériences est faite systématiquement dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-relativiste. Non-relativistes, les atomes ou les neutrons utilisés le sont certes nettement, tant par leur énergie cinétique que par leur énergie potentielle newtonienne (comparées à leur énergie de masse au repos). Il est donc clair que l'emploi de cette équation était justifié. Néanmoins, la gravitation est maintenant décrite dans le cadre de théories relativistes avec un espace-temps courbe, ce qui conduit à formuler des équations d'ondes généralisées : par exemple la généralisation standard de l'équation de Dirac, proposée par Fock et par Weyl – ci-après l'équation DFW. Il semble souhaitable de déterminer les

[1] D'autres auteurs travaillent sur cette question, en particulier T. Jacobson et coll. avec leur "Einstein-aether theory", dotée d'un référentiel privilégié défini "dynamiquement".

prédictions faites par ces équations pour ces expériences, ne serait-ce que pour vérifier que l'écart avec la théorie non-relativiste est encore négligeable aux précisions atteintes actuellement – et surtout pour se préparer au moment où ce ne sera plus le cas, ce qui ouvrira la possibilité d'un test direct de la façon dont nous concevons le couplage entre gravitation et théorie quantique.

Par ailleurs, j'ai proposé antérieurement [B15], [A22] un essai d'interprétation de la correspondance classique-quantique (qui associe une équation d'ondes quantique à un hamiltonien classique). Cette interprétation repose à la fois sur des considérations purement mathématiques, dues en partie à Whitham, et sur l'heuristique de la mécanique ondulatoire de Schrödinger. Il me semble que cette interprétation saisit bien plusieurs aspects importants de la mécanique quantique. Il est intéressant, à mon avis, que cette interprétation conduise, au moins à première vue, à restreindre fortement les systèmes de coordonnées admissibles sur l'espace de configuration étendu (i.e. sur l'espace-temps, dans le cas d'une particule unique), d'une façon qui équivaut à sélectionner un référentiel privilégié, avec une coordonnée temporelle unique – rejoignant ainsi, depuis un départ tout à fait différent, mes travaux sur la gravitation proprement dite. Dans ce travail de 1998, j'ai montré que cette interprétation aboutit sans ambiguïté à une écriture unique pour l'équation de Klein-Gordon dans un champ de gravitation statique. L'équation ainsi obtenue est distincte de l'équation "standard" de Klein-Gordon dans un espace-temps courbe (laquelle dépend d'un paramètre scalaire arbitraire). Mais l'équation de Klein-Gordon s'applique à des particules de spin 0, tandis que les neutrons sont des particules de spin 1/2. De telles particules sont assujetties à l'équation de Dirac.

Le programme que je m'étais fixé consistait donc :

- à étudier les généralisations possibles de l'équation de Dirac au cas d'un espace-temps courbe, en essayant de partir de mon interprétation antérieure de la correspondance classique-quantique ;
- à analyser et à comparer le comportement de ces équations de Dirac "gravitationnelles" dans le cas de champ gravitationnel faible et de particules lentes, pour lequel on dispose de résultats expérimentaux qui vont sans doute devenir de plus en plus précis.

C'est dans le cadre d'une mise à disposition au Département de Physique de l'Université de Bari que j'ai commencé à le réaliser.

3 L'équation de Dirac via la correspondance classique-quantique

L'approche standard pour obtenir les équations d'ondes de la mécanique quantique relativiste en présence d'un champ de gravitation consiste à *covariantiser* l'équation d'ondes valable en l'absence de gravitation (donc pour un espace-temps plat) : on cherche une équation d'ondes généralement-covariante, et coïncidant avec l'équation valable pour l'espace-temps plat dans un système de coordonnées dans lequel, au point considéré, la métrique a la forme de Poincaré-Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ et les coefficients de la connexion s'annulent. Cette procédure est ambigüe – en particulier, mais pas uniquement, dans le cas d'une équation d'ondes du deuxième ordre telle que l'équation de Klein-Gordon. (Cette ambiguïté est connue, cf. par ex. Tagirov.) Mon approche est différente, elle consiste à appliquer la correspondance classique-quantique.

J'ai commencé [a3] par adapter le travail précédent [B15], [A22] sur la correspondance quantique, pour pouvoir l'appliquer à l'équation de Dirac. Considérons une particule relativiste classique dont le mouvement est régi par le hamiltonien H, donné en fonction de la 3-impulsion $\mathbf{p}$ (et de la position spatio-temporelle X) par l'équation

$$(E - qV)^2 - (\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 c^2 - m^2 c^4 = 0 \qquad \text{si} \quad E = H(\mathbf{p}, X) \tag{1}$$

[en prenant comme example le cas d'une particule chargée, de charge q, dans un potentiel électromagnétique $(V, \mathbf{A})$]. Selon l'interprétation proposée de la mécanique ondulatoire, cette relation algébrique n'est autre, au facteur $\hbar$ près, que *l'équation de dispersion* (reliant la fréquence ω au covecteur d'ondes spatial $\mathbf{k}$) de l'équation d'ondes quantique cherchée. L'équation de dispersion est reliée de façon biunivoque à l'équation d'ondes, par la correspondance

$$K_\mu \longrightarrow \partial_\mu / i \qquad (\mu = 0, ..., 3), \tag{2}$$

où $K_0 = -\omega$ et $K_j = k_j$, $j = 1, 2, 3$. Cette dernière correspondance est purement mathématique : elle permet de retrouver une équation d'ondes linéaire n'ayant pas nécessairement quoi que ce soit de "quantique", en partant de son équation de dispersion. (Cf. Whitham, "Linear and nonlinear waves".) Dans le cas de l'équation de dispersion (1) associée à une particule relativiste, la correspondance (2) fournit l'équation de Klein-Gordon. Mais la relation algébrique (1), du 2ème degré, a une autre solution que la solution physiquement intéressante H. L'équation obtenue par la correspondance (2) – l'équation de Klein-Gordon – aura donc, elle aussi, trop de solutions. On peut alors penser qu'en *factorisant (1)* en un produit de polynômes du premier degré, *avant* d'appliquer la correspondance (2) à l'un quelconque des facteurs obtenus, on obtiendra une équation d'ondes plus "fondamentale". Ceci aboutit à l'équation de Dirac. L'intérêt de cette approche est notamment qu'elle fonctionne aussi bien pour les cas d'une particule *a*) libre, *b*) soumise à un champ électromagnétique, *c*) ayant un mouvement géodésique dans une métrique statique $\boldsymbol{g}$ [a3]. Dans les cas *a*) et *b*), on retrouve ainsi l'équation de Dirac usuelle dans un espace-temps plat, avec ou sans champ électromagnétique.

Pour le cas *c*), qui concerne la gravitation, il existe en effet un hamiltonien classique, vérifiant une relation quadratique du même type que (1) : j'ai montré en 1998 que l'énergie de la particule (telle qu'elle est définie par Landau & Lifchitz), une fois réexprimée en fonction de la 3-impulsion $\mathbf{p}$, est un hamiltonien H dont les trajectoires sont les géodésiques de $\boldsymbol{g}$ [B15]. Précisons que ce H est défini, comme l'est normalement un hamiltonien, sur le produit de l'espace de phases à six dimensions par le temps, tandis que le "superhamiltonien" $\tilde{H}$, considéré par Misner-Thorne-Wheeler, est défini sur l'espace de phases "relativiste" à huit dimensions. C'est H, et non $\tilde{H}$, qui convient pour appliquer la correspondance classique-quantique [B15]. L'équation de dispersion associée à H est simplement [a3]

$$g^{\mu\nu}K_\mu K_\nu - m^2 = 0 \qquad (\text{signature } +---,\ \hbar = 1 = c). \tag{3}$$

Elle est identique à celle trouvée à partir de (1) pour une particule libre ($V = 0$, $\mathbf{A} = 0$) dans un espace-temps plat. [2] La même factorisation de (3) s'applique donc dans les deux cas, et en appliquant la correspondance (2) à l'un quelconque des facteurs obtenus, on débouche [a3] sur l'équation de Dirac :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbf{1}_4)\psi = 0, \tag{4}$$

avec la relation d'anticommutation (découlant de la factorisation)

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4. \tag{5}$$

La question se pose alors de savoir dans quels systèmes de coordonnées on a le droit de faire ce raisonnement, donc *dans quels systèmes de coordonnées on a le droit d'utiliser la correspondance classique-quantique.* En analysant les transformations de l'opérateur d'ondes et de l'équation de dispersion, j'avais trouvé [B15] qu'il n'est cohérent d'utiliser cette correspondance que dans des classes de systèmes s'échangeant par des transformations ayant toutes les dérivées secondes nulles au point (évènement) X considéré. Je précise ce résultat [a5] en identifiant *deux* telles classes, dans un espace-temps pseudo-riemannien :

- la classe $\mathcal{C}^1_X$ des systèmes localement-géodésiques (en X) pour la métrique d'espace-temps $\boldsymbol{g}$;

- supposons qu'il existe un référentiel (congruence d'observateurs) privilégié P ; alors, apparaît la classe $\mathcal{C}^2_X$ des systèmes adaptés à P et localement-géodésiques (en X) pour la métrique *spatiale* dans le référentiel P.

Notons que, dans le cas d'une *métrique statique*, une telle classe $\mathcal{C}^2_X$ apparaît naturellement : les systèmes de coordonnées dans lequels $\boldsymbol{g}$ a effectivement la forme caractéristique d'une métrique statique *et* qui, de plus, sont localement-géodésiques (en X) pour la métrique spatiale dans ce "référentiel statique". On voit déjà sur ce cas que les classes $\mathcal{C}^1_X$ et $\mathcal{C}^2_X$ sont en général distinctes : ainsi l'on obtiendra deux versions non-équivalentes de l'équation de Dirac gravitationnelle, selon qu'on aura appliqué la correspondance classique-quantique dans l'une ou l'autre classe.

4 Transformation tensorielle de l'équation de Dirac

Les classes $\mathcal{C}^1_X$ et $\mathcal{C}^2_X$ sont très restreintes, parce que, dans un espace courbe, un système de coordonnées ne peut pas être localement-géodésique dans un domaine ouvert. Pour

[2] Dans ce dernier cas, on a $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ dans un système de coordonnées cartésien, mais en fait la forme particulière de la métrique $g^{\mu\nu}$ n'est pas utilisée dans le raisonnement [a3].

pouvoir utiliser l'équation de Dirac gravitationnelle obtenue, qui a la forme (4) *dans les systèmes appartenant à la classe retenue* ($\mathcal{C}^1_X$ *ou* $\mathcal{C}^2_X$), il faut donc savoir la réécrire dans des systèmes de coordonnées plus généraux, par une transformation appropriée. Il est clair que l'on ne peut pas se contenter de transformations de Lorentz (qui d'ailleurs n'ont un sens qu'en un point donné de l'espace-temps, dans le cas d'une métrique générale). Pourtant ce sont les seules que l'on peut utiliser, si l'on se satisfait du mode usuel de transformation de l'équation de Dirac : la transformation spinorielle.

C'est ainsi que j'ai été amené à réfléchir aux modes de transformations possibles de l'équation de Dirac – dans un premier temps, *dans un espace-temps plat* et donc avec l'exigence d'être compatible avec la relativité restreinte. J'ai trouvé [a3] que l'on peut transformer cette équation de façon *covariante* (lors d'un changement de coordonnées appartenant au groupe G), à chaque fois que l'on a un couple (G, S) – où G est un sous-groupe du groupe $\mathsf{GL}(4, \mathsf{R})$ des transformations linéaires a priori possibles, et où S est une représentation quelconque du groupe G dans $\mathsf{GL}(4, \mathsf{C})$. J'ai identifié d'abord deux couples (G, S) possibles [a3], puis un troisième [a6], soit dans l'ordre :

- **i**. $\mathrm{G} = \mathsf{SO}^+(1, 3)$, le groupe de Lorentz propre orthochrone, S étant la représentation spinorielle (définie au signe près). C'est le choix fait par Dirac en 1928 et suivi depuis, qui laisse les matrices de Dirac γ^μ invariantes.

- **ii**. $\mathrm{G} = \mathsf{GL}(4, \mathsf{R})$, S étant simplement $\mathsf{S}(L) = L \quad \forall L \in \mathrm{G}$. Ceci définit un mode de transformation dans lequel *la fonction d'ondes* $\psi = (\psi^\mu)$ *est un (4-)vecteur*, et l'ensemble des composantes des quatre matrices, soit $(\gamma^\mu)^\nu{}_\rho$, est un *tenseur* $\binom{2}{1}$ [a3]. C'est ce que j'appelle la “transformation tensorielle” de l'équation de Dirac.

- **iii**. $\mathrm{G} = \mathsf{GL}(4, \mathsf{R})$, S étant la représentation triviale définie par $\mathsf{S}(L) = \mathbf{1}_4 \ \forall L \in \mathrm{G}$. Ce dernier choix se trouve être [a6] le mode de transformation utilisé pour l'extension gravitationnelle standard de l'équation de Dirac (i.e. l'équation DFW).

Il doit être clair que le mode tensoriel **ii** est tout aussi admissible que le mode spinoriel **i** du point de vue de la relativité. En effet, un exemple archétypique de transformation relativiste est celle de l'équation de mouvement pour une particule chargée dans un champ électromagnétique – équation qui fait intervenir non pas quatre mais une matrice (celle des composantes $F^\mu{}_\nu$ du tenseur du champ), laquelle est bel et bien *non*-invariante dans une transformation de Lorentz. Aussi étonnant que cela puisse paraître, il semble bien que le mode de transformation **ii** n'ait pas été aperçu précédemment. (Voir l'introduction dans [a6].)

Il est clair également qu'avec le mode **ii**, les matrices de Dirac γ^μ ne sont effectivement pas invariantes par un changement de coordonnées (même si c'est une transformation de Lorentz), mais que cela ne *devrait* pas avoir de conséquence physique – car le choix d'un quadruplet (γ^μ) de matrices, parmi ceux qui vérifient l'anticommutation (5), devrait être neutre physiquement. Ce dernier point est implicitement considéré comme allant de soi dans la littérature sur l'équation de Dirac. En général, on choisit une fois pour toutes un quadruplet $(\gamma^\mu_{(0)})$, vérifiant (5) avec la métrique $\eta_{\mu\nu}$. Mais on ne voit guère d'arguments pour montrer la neutralité de ce choix, à l'exception d'un travail très récent de Pal, qui démontre certaines identités importantes de la théorie de Dirac dans un cadre déjà plus général que d'habitude.

Avec Frank Reifler, j'ai réalisé une étude systématique [a6] de la mécanique quantique associée à l'équation de Dirac, dans le cadre très général d'un quadruplet quelconque (γ^μ) de matrices vérifiant l'anticommutation (5) dans un système de coordonnées "affine" quelconque (i.e., se déduisant d'un système cartésien par une transformation linéaire (plus une constante) des coordonnées), dans un espace-temps plat. Nous avons utilisé pour cela l'outil de la *matrice hermitisante* de Bargmann et Pauli (déjà utilisée dans le travail sur les équations de Dirac gravitationnelles [a5]). La matrice A, hermitisante pour les matrices γ^μ, permet de définir le courant, et de démontrer son équation de conservation et l'*invariance* du courant par similarité [i.e., par changement du quadruplet (γ^μ) vérifiant (5)]. La matrice B, hermitisante pour les matrices α^μ (où $\alpha^0 \equiv \gamma^0/g^{00}$, $\alpha^j \equiv \gamma^0\gamma^j/g^{00}$), permet de définir le produit scalaire (*défini positif*) $(\psi \parallel \varphi)$ pour les fonctions d'ondes et de montrer que le hamiltonien H de Dirac est un opérateur hermitien pour ce produit scalaire et que ce produit, ainsi que tous les produits $(\mathrm{H}\psi \parallel \varphi)$, sont *invariants par similarité.* Nous avons démontré l'existence et l'unicité (à un facteur réel près) des matrices A et B pour un quadruplet quelconque de matrices vérifiant l'anticommutation (5) dans un système de coordonnées "affine" quelconque, unicité qui entraîne celles du courant et du hamiltonien.

Ces résultats démontrent la neutralité complète du choix des matrices anticommutantes. Par suite, pour comparer les prédictions de l'équation de Dirac avec transformation spinorielle ou tensorielle dans un référentiel inertiel au demeurant arbitraire (puisque les deux transformations rendent l'équation de Dirac covariante), on peut supposer que le quadruplet (γ^μ) est le même pour les deux théories. Leur équivalence est alors évidente. Ainsi, *la mécanique quantique associée à l'équation de Dirac dans un espace-temps plat ne nécessite pas d'introduire la transformation spinorielle* [a6].

5 Equation de Dirac gravitationnelle : cas d'une métrique générale

A la différence de la transformation spinorielle, la transformation tensorielle de l'équation de Dirac peut être utilisée pour des changements de coordonnées quelconques dans un espace-temps plat ou courbe, à condition bien sûr de remplacer en même temps les dérivées partielles par des dérivées covariantes "convenables". La connexion à faire intervenir n'est pas arbitraire. Ainsi, l'équation (4) obtenue dans une métrique statique par la correspondance classique-quantique, équation valable sous cette forme dans les seuls systèmes de la classe $\mathcal{C}_X^2$, se réécrit d'une façon unique dans des systèmes "statiques-compatibles" quelconques [a3]. Pour éviter des répétitions, j'indiquerai d'abord comment j'ai étendu à une métrique générale [a5] cette application de la correspondance classique-quantique. Comme l'a montré Bertschinger, un hamiltonien classique H (tel que celui que j'avais trouvé antérieurement dans le cas statique) peut être identifié pour le mouvement géodésique dans une métrique générale, à partir du "superhamiltonien" $\tilde{H}$. C'est une application du procédé de *réduction dimensionnelle* dans un système hamiltonien indépendant du temps (cf. Arnold, Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique) – en l'occurrence, $\tilde{H}$ est indépendant du temps propre τ. Le hamiltonien H ainsi obtenu dépend du système de coordonnées utilisé : c'est simplement $H(p_j, x^k, t) = -p_0$, où $p_\mu \equiv g_{\mu\nu} p^\nu$ avec $p^\nu \equiv m\, dx^\nu / d\tau$, qui vérifie

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 c^2 = 0. \tag{6}$$

On retrouve donc la même équation de dispersion (3) que dans le cas statique, et ainsi, ici encore, la correspondance (2) appliquée après la factorisation de (3) débouche sur l'équation de Dirac (4) [a5].

Comme je l'ai indiqué après l'éq. (5), il n'est cohérent d'utiliser la correspondance (2) que dans l'une ou l'autre des deux classes de systèmes de coordonnées $\mathcal{C}^1_X$ et $\mathcal{C}^2_X$. Dans les deux cas, je considère la fonction d'ondes $\psi = (\psi^\mu)$ comme un vecteur. Si l'on part de la classe $\mathcal{C}^1_X$, l'équation de Dirac (4) [valable, donc, dans les systèmes de la classe $\mathcal{C}^1_X$] se réécrit de façon unique dans un système général sous la forme

$$(i\gamma^\nu D_\nu - m)\, \psi = 0, \tag{7}$$

où la dérivée covariante D_ν est basée sur la connexion de Levi-Civita. Si l'on part de la classe $\mathcal{C}^2_X$, on obtient dans un système général

$$(i\gamma^\nu \Delta_\nu - m)\, \psi = 0, \tag{8}$$

où Δ_ν dérive d'une connexion particulière, qui a une expression simple dans le référentiel privilégié [a5]. L'équation (7) coïncide avec l'équation de Dirac "plate" si le système de coordonnées utilisé est localement-géodésique et si, de plus, la métrique a la forme standard $\eta_{\mu\nu}$ pour l'évènement X considéré. Autrement dit, *l'équation (7) obéit au principe d'équivalence* au sens précisé par Will. Et j'ai montré qu'au contraire, l'équation de Dirac gravitationnelle standard ("DFW") n'obéit *pas* au principe d'équivalence en ce même sens précis [a5]. Ces trois équations : (7), (8), et DFW, sont *différentes.*

En collaboration avec Frank Reifler, je cherche maintenant à étendre à ces deux équations dans un espace-temps courbe les résultats de mécanique quantique obtenus pour le cas d'un espace-temps plat : la conservation du courant, la définition d'un produit scalaire rendant hermitien l'opérateur hamiltonien, et l'absence d'influence des transformations de similarité. Nous comparons aussi les réponses à ces questions que l'on obtient pour ces deux équations et pour l'équation standard, DFW.

6 Etats stationnaires de l'équation de Dirac-Fock-Weyl dans le champ de gravitation terrestre

A moyen terme, les corrections apportées à l'équation de Schrödinger non-relativiste par les différentes généralisations "gravitationnelles" possibles des équations d'ondes relativistes deviendront mesurables – et donc permettront éventuellement de les départager.

Pour commencer à préparer à ce moment, j'ai étudié les états stationnaires de l'équation DFW, parce que c'est l'équation standard, pour laquelle certains problèmes ont déjà été étudiés.

Approximation d'un champ statique [a4]. J'ai d'abord défini un produit scalaire naturel, pour lequel, dans le cas de la classe de métriques statiques considérée par Obukhov, le hamiltonien de DFW se trouve être hermitien (comme je l'ai vérifié directement, tandis que le raisonnement d'Obukhov passe par l'intermédiaire d'une transformation non-unitaire et d'un produit scalaire dépendant des coordonnées). Puis j'ai obtenu l'équation exacte des états stationnaires d'un bispineur dans cette classe de métriques. Enfin, en utilisant le schéma post-newtonien asymptotique pour un champ gravitationnel faible, mis au point antérieurement [a2, a1], j'en ai déduit l'équation post-newtonienne pour ces états stationnaires, sous une forme qui explicite les corrections par rapport à l'équation de Schrödinger non-relativiste dans le potentiel newtonien. Ceci m'a permis de montrer que, dans le cas des neutrons ultra-froids dans le champ de gravitation terrestre, ces "corrections relativistes" sont effectivement hors d'atteinte pour le moment [a4]. Ce résultat a depuis lors été confirmé par une étude indépendante de Boulanger, Spindel et Buisseret.

Prise en compte des effets de la rotation de la Terre [a7]. Dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe Granit, j'ai étudié les effets de la rotation de la Terre sur les états stationnaires des neutrons ultra-froids dans le champ de gravitation terrestre. Ces effets ne sont pas inclus dans le travail précédent [a4], parce que ce dernier se limite à une métrique statique, au lieu que la rotation conduit à une métrique qui est seulement stationnaire. Pour éviter de refaire le travail précédent dans un cadre plus compliqué, et en anticipant que la petitesse des *corrections relativistes* resterait vraie dans ce cas plus général (mais sans supposer à ce stade la petitesse de l'effet de la rotation), j'ai séparé les corrections relativistes en : **i**) les corrections purement gravitationnelles (celles qui seraient présentes si le champ de gravitation de la Terre était statique) et **ii**) les corrections "purement inertielles" (celles qui seraient présentes à cause de la rotation de la Terre, si la Terre ne produisait pas de champ gravitationnel). L'étude précédente montre que les premières corrections sont négligeables dans l'état actuel de la précision des mesures. Quant aux deuxièmes, on peut les évaluer à partir d'un travail de Hehl et Ni (1990). J'ai trouvé (sans surprise) que celles-ci aussi sont très petites : le seul effet qui ne soit pas inclus dans l'équation de Schrödinger non-relativiste pour la Terre tournante et qui ait une chance d'être bientôt détectable est le couplage spin-rotation – qui n'est pas une correction relativiste, mais n'est pas décrit par l'équation de Schrödinger, à cause du fait que celle-ci est scalaire.

Il restait donc à évaluer l'effet non-relativiste de la rotation, c'est à dire l'effet du terme $\delta \mathrm{H} \equiv i\hbar \boldsymbol{\omega}.(\mathbf{r} \wedge \nabla)$ dans le hamiltonien. Cet effet est proportionnel à la distance ρ à l'axe de rotation de la Terre, et au gradient de la fonction d'ondes dans la direction Est-Ouest. Je suppose qu'un calcul perturbatif au premier ordre est suffisant. Les variations de la distance ρ dans l'appareillage sont évidemment très petites par rapport à ρ, donc il semblait a priori justifié de considérer ρ comme constant. Mais la variation du niveau d'énergie δE due à la rotation de la Terre, que l'on trouve ainsi, est la même quel que soit le niveau E, donc sans signification – dans la mesure où les niveaux ne sont définis qu'à une constante près. En prenant en compte la variation de ρ (sur le conseil de V. Nesvizhevsky), je trouve que $\delta E/E$ est constant, environ 3×10^{-5} pour une vitesse des neutrons de l'ordre de 10 m/s. L'effet de la rotation de la Terre n'est donc pas négligeable, surtout pour les niveaux élevés, qui sont proches les uns des autres [a7].

7 Publications depuis Septembre 2005

N.B.: lorsqu'il n'y a pas de liste d'auteurs, je suis le seul auteur de ces articles.

7.1 Revues à comité de lecture

[a1] "Space isotropy and weak equivalence principle in a scalar theory of gravity", *Brazilian Journal of Physics* **36**, 177-189 (2006).

[a2] "Equations of motion according to the asymptotic post-Newtonian scheme for general relativity in the harmonic gauge", *Physical Review D* **72**, 084002 (2005), 20 pages.

[a3] "Dirac equation from the Hamiltonian and the case with a gravitational field", *Foundations of Physics Letters* **19**, 225-247 (2006).

[a4] "Post-Newtonian equation for the energy levels of a Dirac particle in a static metric", *Physical Review D* **74**, 065017 (2006), 9 pages.

[a5] "Two alternative Dirac equations with gravitation", soumis pour publication.

[a6] M. ARMINJON, F. REIFLER, "Dirac equation: Representation independence and tensor transformation", soumis pour publication.

[a7] "Main effects of the Earth's rotation on the stationary states of ultra-cold neutrons", *Physics Letters A*, à paraître.

7.2 Congrès à comité de lecture

[b1] "Equations of motion according to the asymptotic post-Newtonian scheme for general relativity", 3rd Advanced Research Workshop *"Gravity, Astrophysics and*

Strings at the Black Sea" (Kiten, Bulgarie, 13-20 Juin 2005), *Proceedings* (P. Fiziev & M. Todorov, eds.), St. Kliment Ohridski University Press (2006), pp. 1-9.

[b2] M. NAJIB, M. ARMINJON, H. SMAOUI, "Stochastic Homogenization of a Two-Dimensional Granular Medium", *Proceedings of the Third International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics* (Tunis, Décembre 2006) (à paraître).

[b3] " Quantum wave equations in curved space-time from wave mechanics", texte d'une communication orale à la conférence "Symmetry and Perturbation Theory", 2-9 Juin 2007, Otranto (Italie). Paru dans *Symmetry and Perturbation Theory, Proc. of the International Conference SPT 2007* (G. Gaeta, Raff. Vitolo and S. Walcher, eds), World Scientific (2007), pp. 239-240.

7.3 Séminaires, workshops

[s1] "Scalar gravity with preferred reference frame: summary and observational test", *Seminars of the Theoretical Physics Group*, Università di Bari, INFN Bari, et Politecnico di Bari, 28 Septembre 2005.

[s2] "Two gravitational Dirac equations", communication au Workshop *"Resonance Transitions Between Gravitationally Bound Quantum States of Neutrons"*, LPSC, Grenoble, 6-7 Avril 2006.

[s3] "Dirac equation in a gravitational field: wave mechanics vs. equivalence principle", *Seminars of the Theoretical Physics Group*, Università di Bari, INFN Bari, et Politecnico di Bari, 23 Mai 2006.