## Chapitre 0. Rappels sur les suites et les familles

On rappelle d'abord qu'un ensemble E est dit *dénombrable* s'il est fini *ou* s'il existe une bijection de E sur l'ensemble **N** des entiers naturels. L'ensemble **Z** des entiers rationnels, ainsi que l'ensemble **Q** des rationnels quelconques, sont dénombrables[1], mais l'ensemble **R** des nombres réels ne l'est pas [nous le démontrerons d'ailleurs dans le cours sur la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue : voir §(**2.2.3**)].

Lorsqu'on s'intéresse à un ensemble X, on a souvent à considérer des suites finies $(x_n)_{1\leq n\leq p}$ ou infinies $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de X [les suites infinies seront souvent appelées simplement "suites" et notées simplement $(x_n)$]. Il arrive aussi qu'on ait à manipuler des suites à deux indices, $(x_{mn})$, ou même des "suites" $(x_i)$ dont l'indice $i$ prend ses valeurs dans un ensemble non dénombrable. La notion générale est celle de *famille*, qui n'est qu'une autre façon d'envisager la notion d'application : *une famille* $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *d'éléments de* X, *"indexée" par un ensemble quelconque* I, *est une application de* I *dans* X. Autrement dit : pour chaque indice $i$, élément de l'ensemble I, on se donne un élément bien déterminé $x_i$ dans l'ensemble X.

Comme on le sait déjà (aussi bien pour les applications que pour les suites), il faut se garder de confondre une famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ avec l'ensemble $\{x_i\ ;\ i\in \mathrm{I}\}$de ses éléments i.e. l'ensemble des valeurs prise par l'application, ou image de I par l'application de I dans X. Plus l'ensemble d'indices I et l'ensemble X sont grands, plus il y a de familles différentes prenant le même ensemble de valeurs. Par exemple, considérons les suites finies de $p$ éléments (Card(I) = $p \geq 1$ ; Card(I) est le nombre d'éléments de I et se lit : cardinal de I), prenant leurs valeurs dans un ensemble fini à $N$ éléments (Card(X) = $N$). Il y a $N^p$ suites différentes car, pour les suites, on *tient compte* de l'ordre dans lequel on range les éléments de la suite. Alors qu'il n'y a que $(C^1{}_N + ... + C^p{}_N)$ parties ayant au moins un élément et au plus $p$ éléments distincts (lorsque l'on dénombre les parties, l'ordre ne compte *pas*). Plus particulièrement encore, prenons le cas $p$ = 2 et $N$ = 3 : on vérifie facilement par dénombrement direct qu'il y a $3^2 = 9$ suites de 2 éléments choisis parmi 3, tandis qu'il y a 3 + 3 = 6 parties à 1 ou 2 éléments dans un ensemble de 3 éléments. Avec $p = 4$ et $N = 4$, on a $4^4 = 256$ suites, et seulement $C^1{}_4 + C^2{}_4 + C^3{}_4 + C^4{}_4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ parties à 1, 2, 3 ou 4 éléments dans un ensemble de 4 éléments. Par ailleurs, si $(x_n)$ est une suite infinie de points de X, l'ensemble de ses valeurs, $\mathrm{A}=\{x_n\ ;\ n\geq 1\}$, n'est pas nécessairement infini, bien que ce soit en quelque sorte le "cas général" si X est infini.

Une *suite extraite* $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ d'une suite infinie $(x_n)$ est une suite (application) $k\mapsto x_{n_k}$ , obtenue "en sautant éventuellement des indices, mais sans en répéter ni retourner en arrière, et en allant jusqu'à l'infini", i.e. la suite des indices $n_k$ est *strictement croissante*.

Considérons une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de parties d'un ensemble E, donc une application de I dans l'ensemble X= $\mathcal{P}$ (E). La *réunion de la famille* est la partie de E formée des éléments $x$ qui appartiennent à au moins une partie de la famille :

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \left\{x\in \mathrm{E};\ \exists i\in \mathrm{I}: x\in \mathrm{A}_i\right\}.$$

[1] Pour **Q**, le résultat peut sembler peu intuitif. Ce qui se passe, c'est qu'on peut montrer facilement que le produit ExF de deux ensembles dénombrables l'est aussi. Or, **Q** est l'ensemble des fractions $p/q$ (avec $q \neq 0$ et $p/q = p'/q'$ si $pq' = p'q$ !) donc s'identifie au produit **Z**x**Z*** ou plus précisément (à cause des fractions équivalentes) à une partie de ce produit.

De même, *l'intersection de la famille* est la partie de E formée des éléments $x$ qui appartiennent à toutes les parties de la familles :

$$\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \left\{x \in \mathrm{E};\ \forall i \in \mathrm{I},\ x \in \mathrm{A}_i\right\}.$$

Il est facile de vérifier que les résultats élémentaires sur les réunions et les intersections finies s'étendent aux familles indexées par un ensemble quelconque. Ainsi, "le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires" et vice-versa; et "l'image *réciproque*, par une application *f*, de la réunion (resp. de l'intersection) est la réunion (resp. l'intersection) des images réciproques". C'est encore vrai pour l'image *directe* de la *réunion*. L'image directe de l'intersection est contenue, mais en général *strictement*, dans l'intersection des images directes :

$$f\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) \subset \bigcap_{i\in \mathrm{I}} f(\mathrm{A}_i) \text{ mais en général } \bigcap_{i\in \mathrm{I}} f(\mathrm{A}_i) \not\subset f\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right).$$

# CHAPITRE I

## NOTIONS ELEMENTAIRES DE TOPOLOGIE ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE

La théorie de la mesure (1898-1910) et les distributions (1950) sont les outils "modernes" pour étudier les équations aux dérivées partielles, qui interviennent si souvent en mécanique et en physique. De plus, la théorie de la mesure est presque indispensable dans la théorie des probabilités. Pour utiliser correctement ces outils, il est vraiment préférable d'acquérir un minimum de connaissances sur leur fonctionnement. Ceci serait très difficile si l'on refusait d'apprendre même les notions les plus élémentaires de la topologie et de l'analyse fonctionnelle - notions qui peuvent rendre des services dans bien d'autres domaines des sciences de l'ingénieur et de la physique, par exemple en *optimisation* et en *analyse numérique*. C'est à ces notions de base qu'est essentiellement consacré ce chapitre (parties **1** et **2**).

La partie **3**, *hors programme sauf la définition* (**1.3.1**)*(b) et le début de la Section* (**1.3.2**), contient quelques résultats un peu plus avancés, qui ne sont utilisés que dans la partie **2** du chapitre II, plus la Sect. **(1.3.4)**, qui pourrait être utilisée pour mieux comprendre un cours sur les distributions (mais le cours sur les distributions n'aura plus lieu jusqu'à nouvel ordre).

N.B.: Ce polycopié est volontairement assez dense. Les faits ou résultats *particulièrement* importants commencent en italique gras, par ex.: ***Axiome***, ou ***Théorème***. Parfois même, l'énoncé du résultat sera donné en italique.

### 1.1. Espaces métriques

**(1.1.1)** *Définition*. Soit E un ensemble. On appelle *distance* sur E toute application $d$ de E$\times$E dans l'ensemble $\mathbf{R}_+$ des réels *positifs*[2] vérifiant les conditions suivantes :

(i) $d(x, y) = d(y, x)$ quels que soient $x$ et $y$ dans E.
(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ quels que soient $x$, $y$ et $z$ dans E ("*inégalité du triangle*").

Un ensemble E muni d'une distance $d$ s'appelle un *espace métrique*.

**(1.1.2)** *Exemples de distances*

(a) Bien entendu, la distance euclidienne usuelle sur l'espace usuel à trois dimensions $\mathbf{R}^3$,

$$d(x, y) = d_2(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 )^{1/2},$$

est effectivement une distance au sens de la définition précédente et se généralise immédiatement à $\mathbf{R}^n$, définissant la distance euclidienne sur l'espace "usuel" à $n$ dimensions.

(b) Pour les deux autres définitions suivantes sur $\mathbf{R}^n$, il est aussi facile de vérifier qu'elles satisfont bien aux propriétés (1.1.1) :

[2] On rappelle la convention française : $\alpha$ positif (resp. $\alpha$ négatif) $\iff$ $\alpha \geq 0$ (resp. $\alpha \leq 0$); et $\alpha$ strictement positif (resp. $\alpha$ strictement négatif) $\iff$ $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$).

$$d_1(x, y) = | x_1 - y_1| + ... + | x_n - y_n |, \qquad d_\infty(x, y) = \max (| x_1 - y_1| , ... , | x_n - y_n |).$$

(c) Soient X un ensemble quelconque et B(X) l'espace vectoriel des applications bornées $f$ de X dans **R**, i.e. telles que $f$(X) soit contenu dans un intervalle (borné) [3]de **R**. On définit une distance sur B(X), comme suit :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in \mathrm{X}} \left| f(x) - g(x) \right|.$$

En effet, il est clair que $d_\infty$ ($f$, $g$) est positif et que (i) et (iii) sont vérifiées; et si $d_\infty$ ($f$, $g$) =0, alors nécessairement $f(x) = g(x) \ \ \forall x \in \mathrm{X}$, donc $f = g$, ainsi (ii) est vraie aussi. Ceci est le premier exemple de distance sur un espace de fonctions, mais nous en rencontrerons beaucoup d'autres. Si X est un ensemble fini $\{x_1,...,x_p\}$, les applications de X dans **R** s'identifient aux suites finies $(\alpha_n)_{1 \le n \le p}$ de réels et sont donc toutes des applications bornées; l'espace B(X) s'identifie alors à l'espace $\mathbf{R}^p$. En revanche, si X est infini (même s'il reste dénombrable, auquel cas les applications de X dans **R** s'identifient aux suites infinies de réels), les applications de X dans **R** ne sont pas toutes bornées. De plus, l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathrm{X}}$ des applications de X dans **R**, ainsi que le sous-ensemble B(X), sont alors des espaces vectoriels de dimension *infinie*, car ils contiennent des sous-espaces de dimension finie $p$ mais arbitrairement grande : si X contient un ensemble infini dénombrable $\{x_1,..., x_p,...\}$, considérer l'espace des applications $f$ telles que $f(x)$=0 si $x$ n'est pas l'un des $p$ premiers $x_n$. *Ceci permet de comprendre pourquoi les espaces de fonctions sont, en pratique, toujours de dimension infinie.*

**(1.1.3)** *Boules, parties bornées, parties ouvertes, voisinages.*

*Définitions*. Soient E un espace métrique et $d$ la distance définie sur E.

(a) Soient $x\in$ E et $r$ >0. La *boule ouverte* (resp. la *boule fermée*) *de centre x et de rayon r* dans E est l'ensemble

$$\mathrm{B}(x, r) = \{y\in \mathrm{E};\ d(x, y)< r\} \text{ (resp. } \mathrm{B}'(x, r) = \{y\in \mathrm{E};\ d(x, y) \le r\}).$$

Par exemple, les boules ouvertes (resp. fermées) de **R** (considéré comme espace métrique avec la distance $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ ) sont les intervalles ouverts (resp. fermés) de **R**.

(b) Soit A une partie de E. On dit que A est *bornée* si elle est contenue dans une boule.

(c) Soit A une partie de E. On dit que A est *ouverte* [sous-entendu : dans E], ou que A est un *ouvert* [de E] si, quel que soit le point $x$ de A, il existe une boule B($x$, $r$) de E qui est contenue dans A. On note O l'ensemble des parties ouvertes de E

(d) Soit $x$ un point de E. On dit qu'une partie V de E est un *voisinage de x dans* E si V contient un ouvert contenant $x$.

[3] On considérera aussi des intervalles dans l'ensemble ordonné, noté $\overline{\mathbf{R}}$, obtenu en ajoutant à **R** les deux éléments -∞ et +∞. Mais un intervalle *de* **R**, défini par ses bornes $a$ et $b \in \mathbf{R}$ (et non $\overline{\mathbf{R}}$), sera donc par définition un intervalle *borné*.

*Exercice*. Montrer que :

(i) La réunion de deux parties bornées est une partie bornée.

(ii) Une boule ouverte est une partie ouverte.

(iii) L'ensemble vide $\varnothing$ et E sont des éléments de l'ensemble $\mathsf{O}$ (i.e. sont des ouverts de E).

(iv) La réunion d'une famille *quelconque* d'éléments de $\mathsf{O}$ est un élément de $\mathsf{O}$.

(v) L'intersection d'une famille *finie* d'éléments de $\mathsf{O}$ est un élément de $\mathsf{O}$.

(vi) Pour qu'une partie soit ouverte, il faut et il suffit qu'elle soit un voisinage de chacun de ses points.

*Remarque facultative : définition d'une topologie*

Soit E un ensemble quelconque. On appelle *topologie sur* E un ensemble $\mathsf{O}$ de parties de E vérifiant les propriétés (iii), (iv) et (v); les éléments de $\mathsf{O}$ sont les *ouverts de la topologie* $\mathsf{O}$, et E muni de $\mathsf{O}$ s'appelle un *espace topologique*. Tout espace métrique est donc aussi un espace topologique puisqu'il est muni d'une topologie déduite de la distance par la définition (c). Seules certaines topologies peuvent être obtenues de cette façon, elles sont dites *métrisables*. Dans ce cours, on n'aura à considérer que des topologies métrisables.

**(1.1.4)** *Parties fermées, adhérence d'une partie, parties denses*

Soit E un espace métrique (ou plus généralement un ensemble muni d'une topologie).

*Définition*. On dit qu'une partie B de E est *fermée* [dans E], ou est un fermé [de E], si le complémentaire A=E\B est un ouvert.

*Exercice*. Montrer que :

(i) Une boule fermée est une partie fermée.

(ii) L'intersection d'une famille quelconque de fermés, et la réunion d'une famille finie de fermés, sont des fermés.

*Définition*. Soit A une partie de E. En raison du résultat (ii) ci-dessus, l'intersection des fermés de E qui contiennent A est un fermé de E; c'est donc le plus petit fermé de E qui contienne A ("plus petit que" signifie ici "inclus dans": ceci définit une relation d'ordre, mais pas une relation d'ordre total). On appelle ce fermé *l'adhérence* de A et on le note $\overline{A}$.

(iii) Si A est fermé, il est clair que c'est le plus petit fermé contenant A, donc $A=\overline{A}$. Inversement, si $A=\overline{A}$, alors A est un fermé. Ainsi : (A fermé) <=> ($A=\overline{A}$).

Dire qu'un point $x$ de E est dans $\overline{\mathrm{A}}$ signifie que si F est un fermé tel que F⊃A, alors $x\in$F. Ou encore que si U=E\F est un ouvert tel que U⊂ (E\A), alors $x\notin$U. Ainsi :

[$x\in\overline{\mathrm{A}}$] <=> [∀U ouvert, (U∩A=∅) => ($x\notin$U)] <=> [∀U ouvert, ($x\in$U) => (U∩A≠∅)].

En vertu de la définition d'un voisinage **(1.1.3** d**)**, on a donc obtenu la propriété caractéristique suivante des points de l'adhérence $\overline{\mathrm{A}}$ (A étant un sous-ensemble quelconque de E) :

(iv) ***Proposition.*** *Pour que $x\in\overline{\mathrm{A}}$, il faut et il suffit que, pour tout voisinage* V *de x, on ait* V∩A ≠ ∅ (i.e., il faut et il suffit que "tout voisinage de $x$ rencontre A").

*Exercice*. Montrer que :

(v) (A ⊂ B) => ($\overline{\mathrm{A}}$ ⊂ $\overline{\mathrm{B}}$).

(vi) Si A n'est pas fermé, et si $x\in\overline{\mathrm{A}}$\A, tout voisinage de $x$ contient une infinité de points de A.

*Définition*. Soient A et B deux parties de E. On dit que A *est dense dans* B si B ⊂ $\overline{\mathrm{A}}$.

Si A est dense *dans* E et distinct de E, A n'est donc pas fermé dans E. Par exemple, **Q** *est dense dans* **R**. En effet **(1.1.3** a et d**)**, quel que soit $x\in$**R**, tout voisinage de $x$ contient un intervalle ouvert ]$a$, $b$[, contenant $x$ et donc non vide, et "il est bien clair" qu'un tel intervalle contient au moins un rationnel [démonstration : on peut supposer que $b$ - $a$ > 0, donc il existe un entier $q$ >0 tel que 2 ≤ $q$ ($b$ - $a$), ou $qb$ - $qa$ ≥ 2. Il existe par conséquent un entier $p$ tel que $qa$ < $p$ < $qb$, ou $a$ < $p/q$ < $b$, cqfd. En itérant, on en déduit que ]$a$, $b$[ contient en fait une *infinité* de rationnels].

(vii) Supposons que A soit dense dans B et que, de plus, B soit dense dans une tierce partie C, i.e. B ⊂ $\overline{\mathrm{A}}$ et C ⊂ $\overline{\mathrm{B}}$. Du résultat (v) ci-dessus, il résulte que $\overline{\mathrm{B}}$ ⊂ $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ , donc C ⊂ $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$. Mais $\overline{\mathrm{A}}=\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ puisque $\overline{\mathrm{A}}$ est fermé (iii), donc A est dense dans C.

*Remarque facultative.* Tous les concepts et résultats de cette sous-section, à l'exception de (i), ne dépendent que de la topologie de E (la distance n'y intervient que par la topologie qui lui est associée). De plus, ils sont valables, aux exceptions (i) *et (vi)* près, pour des espaces topologiques quelconques (ce qui est plus fort). Ainsi, bien que l'énoncé (vi) ne concerne que la topologie, il n'est vrai en général que si cette topologie est métrisable. L'intérêt d'avoir un énoncé "topologique" est que, dans de nombreux espaces fonctionnels métrisables, il n'y a pas de distance "naturelle", i.e. il y a de nombreuses distances, tout aussi bonnes (ou mauvaises) les unes que les autres, qui donnent la même topologie. On trouve de nombreux exemples de cette situation dans la théorie des distributions.

**(1.1.5)** *Applications continues, limite d'une suite*

*Définitions*.

(a) Soient E et E' deux espaces métriques (ou deux espaces topologiques). On dit qu'une application $f$ de E dans E' est *continue au point* $x_0$ de E si, pour tout voisinage V' de $f(x_0)$ dans E', il existe un voisinage V de $x_0$ dans E tel que $f$(V) ⊂ V'.

(b) On dit que $f$ est *continue dans* E, ou simplement *continue*, si $f$ est continue en tout point de E.

(c) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite (infinie) de points de E. On dit que la suite $(x_n)$ *tend vers une limite* $x \in$ E si, pour tout voisinage V de $x$, il existe un entier $N$ tel que les $x_n$ soient tous dans V pour $n \geq N$. On note $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soit A une partie de E. Si une suite $(x_n)$ de points de A tend vers une limite $x \in$ E, tout voisinage de $x$ contient tous les $x_n$ pour $n$ assez grand, donc contient des points de A : d'après le critère **(1.1.4** (iv)**)**, $x \in \overline{\mathrm{A}}$. Inversement, si $x \in \overline{\mathrm{A}}$, appliquons ce critère **(1.1.4** (iv)**)** en prenant successivement comme voisinage de $x$ les boules B($x$, $1/n$). Nous obtenons ainsi une suite $(x_n)$ de points de A telle que $d(x, x_n) < 1/n$, donc la suite $(x_n)$ tend vers $x$. En résumé :

(i) *Pour qu'il existe une suite de points de* A *qui tende vers x, il faut et il suffit que* $x \in \overline{\mathrm{A}}$ .

*Exercices* :

(ii) Traduire la définition (a) en termes de distances, "avec des $\varepsilon$".

(iii) Prouver l'équivalence : (F fermé) $\Leftrightarrow$ (si une suite $(x_n)$ de points de F tend vers une limite $x \in$ E, alors $x \in$ F).

(iv) Prouver les caractérisations suivantes d'une application continue :

$$(\alpha)\ f \text{ continue dans E} \Leftrightarrow (\beta)\ \forall \mathrm{U'} \text{ ouvert de E'},\ f^{-1}(\mathrm{U'}) \text{ est un ouvert de E}$$
$$\Leftrightarrow (\gamma)\ \forall \mathrm{A} \subset \mathrm{E},\ f(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$$
$$\Leftrightarrow (\delta) \text{ pour toute suite } (x_n) \text{ de points de E, si } (x = \lim_{n\to\infty} x_n), \text{ alors } (f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n))$$
$$\Leftrightarrow (\varepsilon)\ \forall \mathrm{F'} \text{ fermé de E'},\ f^{-1}(\mathrm{F'}) \text{ est un fermé de E.}$$

*Remarque facultative*. On voit qu'à l'exception de (ii), toutes les notions et résultats de cette sous-section ne dépendent que de la topologie. Mais pour prouver les caractérisations "par les suites" dans (i), (iii) et (iv), on utilise en fait la distance, et ces caractérisations ne sont pas valables en général pour une topologie non métrisable. Plus précisément, les implications directes, par ex. [$f$ continue dans E] => [si $(x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n)$, alors $(f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n))$], sont vraies pour des espaces topologiques quelconques (exercice), mais les implications récipro-ques ne sont vraies en général que si les topologies de E et E' sont métrisables. Ceci contribue à rendre difficile l'étude des espaces non métrisables, non abordée dans ce cours. Enfin, il semble évident qu'une suite ne devrait avoir qu'une seule limite (ou pas du tout), mais les hypothèses d'un espace topologique **(1.1.3)** ne suffisent pas à le garantir. Heureusement c'est toujours vrai "en pratique", et notamment c'est vrai dans un espace métrisable (exercice).

### **(1.1.6)** *Suites de Cauchy, espaces métriques complets*

*Définition*. Soit E un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)$ de points de E est une *suite de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que, pour $m \geq N$ et $n \geq N$, on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

*Propositions*.

(i) Si une suite $(x_n)$ tend vers une limite $x$, alors c'est une suite de Cauchy.

(ii) Si $(x_n)$ est une suite de Cauchy, et si une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tend vers une limite $x$, alors la suite $(x_n)$ tend vers $x$.

Démonstration : *Exercice*.

*Définition*. Un espace métrique E est dit *complet* si toute suite de Cauchy a une limite [sous-entendu : dans E].

***Axiome***. **R** *est un espace métrique complet* (lorsqu'il est muni de la distance habituelle $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$).
Il se trouve même que **R** est très précisément construit pour compléter **Q**. Dans cette construction abstraite, l'axiome devient bien sûr un théorème. Et en effet, **Q** n'est pas complet, car **Q** est dense dans **R** **(1.1.4)** et donc (comme **Q** $\neq$ **R** !) n'est pas fermé dans **R**, or on a le résultat suivant :

(iii) *Proposition*. Soit F une partie d'un espace métrique E. Supposons que, muni de la distance définie sur E, l'ensemble F soit un espace métrique complet. Alors F est fermée dans E.

Il suffit de montrer que si une suite $(x_n)$ de points de F tend vers une limite $x\in$ E, alors $x\in$ F **(1.1.5** (iii)**)**. Or, si $(x_n)$ a une limite $x$ dans E, c'est une suite de Cauchy d'après (i), et puisque les $x_n$ sont dans F, elle a donc une limite $y$ *dans* F par hypothèse. Mais une suite ne peut avoir qu'une seule limite (ce qui se déduit par exemple de (i) et (ii)), donc $x = y\in$ F, cqfd. Réciproquement :

(iv) *Proposition*. Soient E un espace métrique complet et F une partie fermée de E. Alors F, muni de la distance $d$, est un espace métrique complet.

Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy de points de F. La définition ci-dessus montre que c'est aussi une suite de Cauchy dans E. Elle a donc par hypothèse une limite $x$ dans E. Mais puisque $(x_n)$ tend vers $x$ et que F est fermé, $x\in$ F **(1.1.5** (iii)**)**, donc toute suite de Cauchy de points de F converge dans F, cqfd.

**(1.1.7)** *Espaces métriques compacts*

La notion d'espace compact est plus élaborée que celles définies précédemment. Pourtant, dans $\mathbf{R}^n$ et même dans une "variété" ordinaire (par ex. courbe, surface, hypersurface), les compacts sont "faciles à reconnaître" car ils coïncident avec les parties fermées et bornées (*théorème* de Borel-Lebesgue ci-dessous). De plus, les propriétés utiles des compacts sont surtout la propriété de Bolzano-Weierstrass et le théorème de Heine ci-dessous, dont les énoncés n'ont rien de spécialement mystérieux. Il ne faut donc pas avoir peur du mot "compact". Un concept en apparence "évident" comme celui de fonction continue peut se révéler plus dangereux, si l'on croit à tort que les fonctions continues sont toujours de "bonnes" fonctions. Par exemple, les fonctions continues de [0,1] dans **R** peuvent n'avoir de dérivée *à droite* en *aucun* point (sans parler d'une vraie dérivée!) et ces "monstres" représentent même, d'une certaine façon, la "majorité" des fonctions continues.

*Définitions*. Soient E un espace métrique, $d$ la distance sur E.

(a) Soit $\alpha$ un réel >0. On dit qu'une partie A de E est *$\alpha$-analysante* [pour E] si, quel que soit $x \in$ E, il existe un $y \in$ A tel que $d(x, y) < \alpha$. (autrement dit, E est une réunion de boules B($y$, $\alpha$) avec $y \in$ A).

(b) On dit que E est *précompact* si, pour *tout* réel $\alpha$ >0, il existe une partie $\alpha$-analysante *finie*. On dit que E est *compact* si E est précompact *et* complet.

(c) Une famille de parties de E est appelée un *recouvrement de* E si la réunion de la famille est E. Si ces parties sont des ouverts de E, on dit que la famille est un recouvrement ouvert.

(i) *Théorème* (Fréchet). Pour un espace métrique E, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) E est compact.

2) De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un recouvrement (ouvert) fini ("*propriété* de Borel-Lebesgue").

3) *De toute suite de points de* E*, on peut extraire une sous-suite convergente* ("propriété de Bolzano-Weierstrass").

*Démonstration*. Le schéma est : 1) => 2), 2) => 3) et 3) => 1). Cependant, la preuve que 1) => 2) est un peu délicate et nous l'admettrons. Les deux autres sont instructives.

Pour voir que 2) => 3), considérons une suite quelconque $(x_n)$ de E et définissons les ensembles $\mathrm{A}_n = \{x_m;\ m \geq n\}$. Supposons que nous sachions montrer que l'intersection F de tous les $\overline{\mathrm{A}_n}$ n'est pas vide. Alors nous pourrons extraire de la suite $(x_n)$ une sous-suite convergente, de la façon suivante. Si F n'est pas vide, i.e. s'il existe un $x$ appartenant à tous les $\overline{\mathrm{A}_n}$ , alors d'après le critère **(1.1.4** (iv)**)**, pour tout $n$ il existe $y_n \in \mathrm{A}_n$ tel que $d(x, y_n) < 1/n$. Par définition de $\mathrm{A}_n$, le point $y_n$ est de la forme $y_n = x_{m_n}$ avec $m_n \geq n$. Pour être sûrs que $m_{n+1} > m_n$, modifions un peu la définition de $y_n$ : procédons par récurrence et supposant connu $y_n = x_{m_n}$ prenons $y_{n+1} = x_{m_{n+1}}$ dans $\mathrm{A}_{(m_n)+1}$ tel que $d(x, y_{n+1}) < 1/(n+1)$. Nous construisons ainsi une suite extraite $(x_{m_n})$ qui converge vers $x$. Maintenant vérifions que F n'est pas vide. S'il l'était, la réunion des complémentaires $\mathrm{E}\backslash\overline{\mathrm{A}_n}$ serait un recouvrement ouvert de E, dont par hypothèse on pourrait extraire un recouvrement fini, i.e. il existerait des entiers $n_1 \leq ... \leq n_k$ tels que $(\mathrm{E}\backslash\overline{\mathrm{A}_{n_1}}) \cup .... \cup (\mathrm{E}\backslash\overline{\mathrm{A}_{n_k}}) = \mathrm{E}$, ou $\overline{\mathrm{A}_{n_1}} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n_k}} = \varnothing$. Mais par construction, on a $\mathrm{A}_n \supset \mathrm{A}_m$ si $n \leq m$, et donc **(1.1.4** (v)**)** $\overline{\mathrm{A}_n} \supset \overline{\mathrm{A}_m}$ , ainsi cela signifierait que $\overline{\mathrm{A}_{n_k}} = \varnothing$, d'où $\mathrm{A}_{n_k} = \varnothing$, ce qui est manifestement absurde.

Montrons que 3) => 1) : supposant vraie la propriété de Bolzano-Weierstrass, il est déjà clair que E est complet. En effet, si $(x_n)$ est une suite de Cauchy, on peut, par hypothèse, en extraire une sous-suite convergente (puisque c'est vrai pour toutes les suites); or la proposition **(1.1.6** (ii)**)** nous dit que dans ces conditions la suite $(x_n)$ est convergente. Pour prouver que, pour tout $\alpha>0$, il existe une partie $\alpha$-analysante finie, raisonnons par l'absurde : si ce n'est pas le cas, il existera un $\alpha>0$ tel que pour toute partie finie A de E, on puisse trouver un $x\in$ E tel que $d(x, y) > \alpha$. pour tout $y\in$ A. En partant d'un point quelconque $x_1$ de E, nous construisons alors par récurrence une suite $(x_n)$ telle que $d(x_n, x_m) > \alpha$ pour tous les indices $n$ et $m$ : connaissant $x_1,..., x_n$, il suffit de prendre A=$\{x_1,..., x_n\}$ et $x = x_{n+1}$ dans ce qui précède. D'une telle suite, il n'y a évidemment aucune chance d'extraire une sous-suite convergente.

Les autres résultats sur les compacts vont maintenant tomber comme des fruits mûrs.

*Définition*. Une application $f$ d'un espace métrique E dans un autre E' est dite *uniformément continue* si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que, pour $d(x, y) \le \eta$, on ait $d'(f(x), f(y)) \le \varepsilon$.

D'après la première caractérisation d'une application continue dans **(1.1.5** (iv)**)**, il est clair que toute application uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse en général, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (vérifier).

(ii) *Théorème de Heine*. Si E est un espace métrique compact, toute application continue de E dans un espace métrique E' est uniformément continue.

Raisonnons encore une fois par l'absurde : supposons que $f$ soit continue dans E, mais pas uniformément continue. D'après la définition, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $\eta>0$, il existe $x$ et $y$ dans E, vérifiant $d(x, y) \le \eta$ et $d'(f(x), f(y)) > \varepsilon$. Prenons $\eta=1/n$ : nous avons une suite $(x_n, y_n)$ de couples de points de E vérifiant $d(x_n, y_n)\ ) \le 1/n$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$. D'après Bolzano-Weierstrass, nous pouvons extraire de la suite $(x_n)$ une sous-suite $(x_{n_k})$ qui converge vers une limite $x\in$ E. On a par construction $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \le 1/n_k$ et $d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) > \varepsilon$. La première de ces inégalités entraîne que la sous-suite $(y_{n_k})$ converge aussi vers $x$. Il résulte alors de la deuxième et de la continuité de $f$ (et de $d'$) que $d'(f(x), f(x)) \ge \varepsilon$, ce qui est absurde.

*Définition*. On dit qu'une *partie* K d'un espace métrique E est *compacte*, ou que K est un compact de E, si l'espace métrique K est compact (pour la "distance induite" par celle considérée sur E, i.e. la même distance $d$).

D'après la définition, K doit être un espace complet et donc fermé dans E **(1.1.6** (iii)**)**. De plus, il doit exister des parties $\alpha$-analysantes finies pour tout $\alpha>0$; le simple fait qu'il en existe une pour *un* $\alpha>0$ entraîne que K est borné, d'après l'inégalité du triangle. Ainsi :

(iii) Si K est une partie compacte de E, alors K est fermée et bornée.

Dans les espaces $\mathbf{R}^n$, cette condition suffit :

(iv) ***Théorème de Borel-Lebesgue.*** *Les parties compactes de* $\mathbf{R}^n$ *sont exactement les parties fermées et bornées. Par conséquent, si* K *est une partie fermée et bornée de* $\mathbf{R}^n$*, alors de toute suite de points de* K*, on peut extraire une sous-suite convergente*

Nous traitons ici le cas $n = 1$. D'après (iii), il s'agit de vérifier que si une partie K de $\mathbf{R}$ est fermée et bornée, alors K est compacte. Comme $\mathbf{R}$ est complet, K est un espace complet d'après **(1.1.6** (iv) **)**. Montrons que K est un ensemble précompact. Puisque K est borné, il est contenu dans un intervalle $]a, b[$ de $\mathbf{R}$. Soit $\alpha$ un réel >0. Il existe un entier $n$ tel que $n\alpha > b - a$. Posant $h = (b - a)/n$, on obtient une partition de K en la réunion des parties $I_j = K \cap ]a + (j-1)h, a + jh]$ pour $j = 1,..., n$. Prenant un élément dans chacun de ceux des $I_j$ qui ne sont pas vides, nous obtenons une partie finie $\alpha$-analysante pour K, donc K est précompact puisque $\alpha$ est arbitraire. Le cas $n$ quelconque sera traité à la Section (**1.2.3**) (points (ii) et (iii)).

(v) *Théorème*. Si $f$ est une application continue d'un espace métrique E dans un autre, E', elle transforme tout compact de E en un compact de E'.

Soit K un compact de E. Pour montrer que $f$(K) est un espace métrique compact, considérons un instant la restriction $g$ de $f$ à K : c'est une application continue surjective de K sur $f$(K); donc, nous pouvons supposer que K=E et $f$(K)=E'. Soit alors un recouvrement de E' par des ouverts $\Omega'_i$. Puisque $f$ est continue, les images réciproques $\Omega_i = f^{-1}(\Omega'_i)$ sont des ouverts de E dont la réunion recouvre E. Comme E=K est compact, on peut en extraire un recouvrement fini, i.e. $E = \Omega_{i_1} \cup ... \cup \Omega_{i_n}$, d'où $E' = f(E) = f(\Omega_{i_1}) \cup ... \cup f(\Omega_{i_n})$. Mais pour tout i on a $f(\Omega_i) = f(f^{-1}(\Omega'_i)) = \Omega'_i$, ainsi on a extrait un recouvrement fini, donc c'est effectivement fini.

(vi) ***Proposition***. Si $f$ est une application continue d'un espace métrique *compact* E dans $\mathbf{R}$, elle est bornée et *atteint ses bornes*.

L'image $f$(E) est compacte (v), donc fermée et bornée dans $\mathbf{R}$ (iii). Qu'elle soit bornée signifie que $M = \sup \{f(x); x \in E\}$ et $m = \inf \{f(x); x \in E\}$sont des réels (finis). Montrons par exemple que "le sup est atteint". Par définition, il existe une suite $(x_n)$ de points de E telle que $f(x_n) \leq M$ et $M \leq f(x_n) + 1/n$. Puisque E est compact, on peut en extraire une sous-suite $(x_{n_k})$ ayant une limite $y \in E$. Comme $f$ est continue, on peut alors passer à la limite dans les inégalités précédentes, ce qui donne $f(y) = M$, i.e. le sup est atteint. N.B.: l'existence de $M$ et $m$ fait intervenir le fait que $\mathbf{R}$ est complet.

(vii) *Proposition*. Si E est un espace métrique compact, toute partie fermée de E est compacte.

Soit d'abord F une partie *quelconque* de E. En adaptant le raisonnement de (iv), on voit que l'existence, pour $\alpha$ >0, d'une partie finie $\{x_1,...,x_n\}$, $(\alpha/2)$-analysante pour E, permet de construire une partie finie de F, $\alpha$-analysante pour F : on prend un point $y_i$ dans chacun de ceux des ensembles $F \cap B(x_i, \alpha/2)$ qui ne sont pas vides, puis on applique l'inégalité du triangle. Maintenant si F est fermée dans E, on sait, puisque E est complet, que F est un espace complet **(1.1.6** (iv) **)**, ce qui achève de montrer que F est un espace compact.

*Définition*. On dit qu'un espace métrique E est *localement compact* si, pour tout point $x$ de E, il existe un voisinage de $x$ dans E qui soit compact.

Par exemple, le théorème de Borel-Lebesgue (iv) entraîne aussitôt que **R** *est localement compact* (mais n'est bien sûr pas compact), et on verra en section 2 que $\mathbf{R}^n$ l'est aussi. Les espaces métriques localement compacts sont aussi "bons" que $\mathbf{R}^n$ pour beaucoup de propriétés concernant l'intégration- sauf la convolution, où intervient aussi la structure de groupe additif.

(viii) *Proposition*. Si E est un espace métrique localement compact, les ouverts de E, ainsi que les fermés de E, sont des espaces métriques localement compacts.

Soient U un ouvert de E et $x$ un point de U. Par hypothèse, il existe un voisinage K de $x$ dans E qui est compact. Puisque K est un voisinage de $x$, il existe une boule B($x$, $r'$) *de* E contenue dans K, et puisque U est ouvert, il existe une boule B($x$, $r''$) *de* E contenue dans U, donc en prenant $r < \min(r',r'')$, la boule *fermée* B'($x$, $r$) *de* E est contenue dans U et dans K. Etant fermée dans E et contenue dans K, cette boule est un compact (vii). Etant contenue dans U, c'est un voisinage de *x dans* U. Donc U est un espace localement compact.

Soient F un fermé de E, $x$ un point de F et K un voisinage compact de $x$ dans E. Alors K$\cap$F est fermé dans K, donc est un compact. De plus, K étant un voisinage de $x$ dans E, il contient un ouvert U contenant $x$, donc K$\cap$F contient U$\cap$F qui est un ouvert de F contenant $x$. En somme, K$\cap$F est un voisinage compact de $x$ dans F. L'espace F est donc localement compact.

## 1.2. Espaces normés, espaces de Banach

**(1.2.1)** *Définition*

(a) Soient E un *espace vectoriel* (sur le corps **F**, **F** = **R** ou **F** = **C**), et une application notée $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbf{R_+}$ . On dit que cette application est une *norme* sur E si l'on a :

(I) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(II) $\|\lambda\ x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbf{F}\ \forall x \in \mathrm{E}$.

(III) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathrm{E}$ ("*inégalité du triangle*").

On dit alors que E est un *espace normé*. Un espace normé E est un espace métrique pour la distance $d(x,y) = \|x-y\|$, qui est invariante par translation. Si cet espace métrique est *complet,* on dit que E est un *espace de Banach*.

(i) *Proposition*. Soient X un *espace métrique* et F un *espace normé*. La somme de deux applications continues $f$ et $g$ de X dans F, définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, et le produit $\lambda f$, défini par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, sont des applications continues de X dans F.

Cela résulte des définitions et du calcul suivant :

$$d\big(f(x_0)+g(x_0), f(x)+g(x)\big) = \|f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)\| \leq \|f(x)-f(x_0)\| + \|g(x)-g(x_0)\|$$

$$d\big(\lambda f(x_0), \lambda f(x)\big) = \|\lambda\big(f(x)-f(x_0)\big)\| = |\lambda|\|f(x)-f(x_0)\|.$$

L'ensemble C (X, F) des *fonctions continues de* X *dans* F est donc un *espace vectoriel* mais il n'est en général pas possible de le munir d'une norme de façon naturelle.

**(1.2.2)** *Exemples. Espaces normés d'applications linéaires continues*

Tous les exemples donnés en **(1.1.2)** comme exemples de distances correspondent en fait à des *normes* sur les espaces vectoriels réels correspondants, à savoir $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^n$ et B(X). Nous allons construire d'autres exemples, dont beaucoup seront des espaces de fonctions. Commençons par étudier les espaces d'applications linéaires continues, et d'abord caractérisons celles-ci :

(i) ***Proposition.*** *Soient* E *et* F *deux espaces normés et u une application* ***linéaire*** *de* E *dans* F. *Pour que u soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\alpha \geq 0$ *tel que l' on ait*

$$\|u(x)\| \leq \alpha \|x\| \text{ pour tout } x \text{ dans E.} \tag{1}$$

Nécessité : la continuité de $u$ au point $x$=0 de E signifie l'existence, pour tout $\varepsilon>0$, d'un nombre $r = r_\varepsilon > 0$, tel que, pour $d(0,x) = \|x\| \leq r_\varepsilon$, on ait $d(u(0),u(x)) = \|u(x)\| \leq \varepsilon$ ; l'homogénéité de degré un de $u$ s'écrit :

$$u(x) = \frac{\|x\|}{r} u\left(\frac{r}{\|x\|} x\right) \quad \text{pour } x \neq 0. \tag{2}$$

Par suite (1) est vraie pour tout $x$ si l'on prend $\varepsilon=1$ et $\alpha = 1/r_1$, compte-tenu de (II). Inversement, si (1) est vérifiée, (2) montre que $\|u(x)\| \leq \varepsilon$ si $\|x\| \leq r_\varepsilon = \varepsilon/\alpha$, ce qui prouve que $u$ est continue en 0. L'invariance par translation de $u$ et de $d$ montrent alors que $u$ est continue dans E, cqfd.

En vertu de **(1.2.1** (i)**)**, la somme de deux applications linéaires continues est (linéaire et) continue, et le produit par un scalaire d'une application linéaire continue est une application (linéaire et) continue. L'ensemble des *applications linéaires continues* de E dans F est donc un *sous-espace vectoriel* de *C* (E,F), noté *L* (E,F). A cause de l'homogénéité de $u$, la relation (1) équivaut à dire que $\|u(x)\| \leq \alpha$ si $\|x\| = 1$. Par suite, le nombre

$$\|u\| = \sup\left\{\|u(x)\| \,;\, x \in \text{E}, \|x\| = 1\right\} \tag{3}$$

*est le plus petit nombre* $\alpha \geq 0$ *tel que (1) soit vérifiée*. Il est facile de vérifier que ceci définit une *norme* sur l'espace vectoriel *L*(E,F). Ce qui précède entraîne l'inégalité importante :

$$\underline{\| u(x) \| \leq \| u \| . \| x \|} \quad . \tag{4}$$

(ii) *Proposition*. Si E est un espace normé et F un espace de Banach, alors *L*(E,F) est un espace de Banach.

Soit $(u_n)$ une suite de Cauchy d'éléments de $L$(E,F). Pour tout point $x$ de E, la suite $(u_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, car on a d'après (4) :

$$\|u_n(x) - u_p(x)\| = \|(u_n - u_p)(x)\| \leq \|u_n - u_p\|.\|x\| \; . \tag{5}$$

La suite $(u_n(x))$ admet donc par hypothèse une limite $y \in$ F, posons $y = u(x)$. Ceci définit une application $u$ de E dans F, qui est linéaire puisque $u_n(x + \lambda y) = u_n(x) + \lambda u_n(y)) \to u(x) + \lambda u(y)$ quand $n \to \infty$. Puisque $(u_n)$ est une suite de Cauchy dans l'espace normé $L$(E,F), c'est une suite bornée : il existe donc un réel $A = \sup\{\|u_n\|; n \geq 1\}$ tel que $\|u_n\| \leq A$ pour tout $n$, donc d'après (4) $\|u_n(x)\| \leq A\|x\| \; \forall n \; \forall x$, d'où en passant à la limite $\|u(x)\| \leq A\|x\| \; \forall x$. Ceci, d'après la proposition (i), montre que $u$ est continue, et la définition (3) entraîne que

$$\|u\| \leq A = \sup\{\|u_n\|; n \geq 1\}. \tag{6}$$

Montrons que $\|u_n - u\| \to 0$ quand $n \to \infty$. Puisque $(u_n)$ est une suite de Cauchy dans l'espace normé $L$(E,F), on a $\|u_n - u_p\| \leq \varepsilon$ quand $n$ et $p$ sont $\geq N(\varepsilon)$, d'où en faisant tendre $p$ vers l'infini dans (5) : $\|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, soit d'après (3) $\|u_n - u\| \leq \varepsilon$, dès que $n \geq N(\varepsilon)$, ce qui démontre la proposition. On a donc en fait $A = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|$ dans (6).

En particulier, si l'espace d'arrivée F est le corps des scalaires (**R** ou **C**), (ii) se traduit par le corollaire suivant :
(iii) Soit E un espace normé. *L'espace vectoriel des formes linéaires continues sur* E *est un espace de Banach*, appelé *dual de* E et souvent noté E'.

**(1.2.3)** *Produits d'espaces normés. Espaces normés de dimension finie. Normes équivalentes.*

Soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces normés (avec la même notation pour les normes respectives $x_1 \mapsto \|x_1\|$ et $x_2 \mapsto \|x_2\|$). Sur *l'espace vectoriel produit* $E = E_1 x E_2$ [i.e. l'ensemble des couples $x = (x_1, x_2)$ avec $x_i \in E_i$ ($i$ =1,2), muni des lois $x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et $\lambda . x = \lambda .(x_1, x_2) = (\lambda . x_1, \lambda . x_2)$ ], on définit bien une *norme* en posant $\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$. Le critère (i) montre tout de suite que les applications linéaires "projection", $pr_1$: $x \mapsto x_1$ et $pr_2$: $x \mapsto x_2$ , sont continues. Inversement, les applications $i_1$: $x_1 \mapsto (x_1, 0)$ et $i_2$: $x_2 \mapsto (0, x_2)$ sont des isométries linéaires de $E_1$ et $E_2$ sur des sous-espaces $F_1$ et $F_2$ de E [une *isométrie i* d'un espace métrique X dans un autre, X', est une application qui conserve la distance : $d'(i(x), i(y)) = d(x, y)$. C'est donc nécessairement une application continue injective de X dans X', et même une application *bicontinue* (i.e. une application bijective continue dont l'application inverse est continue) de X sur $i$(X)]. On peut donc identifier $E_1$ et $E_2$ à ces sous-espaces de E.

(i) *Proposition*. Pour que l'espace normé produit $E_1 x E_2$ soit complet (i.e. soit un espace de Banach), il faut et il suffit que $E_1$ *et* $E_2$ le soient. Pour que $E_1 x E_2$ soit localement compact, il faut et il suffit que $E_1$ *et* $E_2$ le soient.

La première affirmation est facile à vérifier car, compte-tenu de ce qui précède, pour qu'une suite $(x_n) = ((x_{n1}, x_{n2}))$ de points de $E_1 x E_2$ soit une suite de Cauchy (resp. une suite convergente), il faut et il suffit que $(x_{n1})$ et $(x_{n2})$ soient des suites de Cauchy (resp. des suites convergentes) de $E_1$ et $E_2$. Pour qu'un espace normé E soit localement compact, il faut et il suffit, d'après l'invariance par translation, que 0 ait un voisinage compact. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, ceci équivaut à dire qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que, de toute suite $(x_n)$ de points de E vérifiant $\|x_n\| \leq \alpha$, on puisse extraire une sous-suite convergente. Il est alors, de la même façon que pour la première, facile de vérifier la deuxième assertion.

Notons que l'homogénéité de la norme permet de dire que si la possibilité d'extraire une sous-suite convergente est vraie pour *un* réel $\alpha>0$, elle l'est pour *tout* $\alpha>0$. En appliquant une nouvelle fois le critère de Bolzano-Weierstrass, on en déduit :

(ii) *Proposition*. Si E est un espace normé localement compact, les parties compactes de E sont exactement les parties fermées et bornées

(cf. **(1.1.7** (iii)**)**. En corollaire de la proposition (i), nous obtenons par récurrence :

(iii) *Proposition. Les espaces* $\mathbf{R}^n$ *sont des espaces de Banach localement compacts.*

Nous admettrons le théorème suivant, qui dit que les espaces $\mathbf{R}^n$ sont essentiellement les *seuls* espaces normés localement compacts car : (a) les espaces de dimension finie $n$ sont "tous pareils" et (b) les espaces de dimension infinie sont "trop gros" pour être localement compacts.

(iv) *Théorème*
(a) Soit E un espace normé de dimension finie $n$ sur $\mathbf{R}$ (ou sur $\mathbf{C}$), et $(a_1,..., a_n)$ une base de l'espace vectoriel E. L'isomorphisme linéaire de $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$) sur E défini par :

$$(\alpha_1,...,\alpha_n) \mapsto \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$$

est *bicontinu*.

(b) (F. Riesz). Tout espace normé localement compact est de dimension finie.

*Définition*. On dit que deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sur un espace vectoriel E sont *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $x$ dans E on ait :

$$\alpha \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1.$$

Grâce à la proposition **(1.2.2** (i)**)**, nous pouvons reformuler ainsi la partie (a) du théorème :

(v) ***Proposition.*** *Sur un espace normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

*Exercices*. 1) Vérifier à partir de ce qui précède que tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach localement compact. 2) Soient E et F des espaces normés. Montrer que, *si* E *est de dimension finie, alors toute application linéaire de* E *dans* F *est continue.*

**(1.2.4)** *Espaces normés de fonctions bornées et de fonctions continues bornées*

Nous avons déjà rencontré l'espace vectoriel B(X) des fonctions bornées d'un espace métrique X dans **R (1.1.2)**. En utilisant la définition classique de la somme et du produit par un scalaire de fonctions de X dans F, donnée dans **(1.2.1** (i)**)**, nous pouvons plus généralement définir l'espace vectoriel B(X, F) des *fonctions bornées d'un espace métrique* X *dans un espace normé* F. Nous définissons sur B(X, F) la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in \mathrm{B}(X, F), \quad \| f \|_\infty = \sup \{ \| f(x) \| \, ; x \in X \}. \qquad (1)$$

(i) *Proposition*. Si F est un espace de Banach, B(X, F) est un espace de Banach.

Démonstration : *Exercice.*

Nous avons aussi rencontré l'espace vectoriel C =C (X, F) des fonctions continues d'un espace métrique X dans un espace normé F **(1.2.1)**. Définissons le sous-espace $C^B = C^B(X, F)$ de *C*, constitué des fonctions *continues bornées* de X dans F. Si X est compact, nous savons d'ailleurs que $C^B$ est identique à C **(1.1.7** (v) et (iii)**)**. Comme $C^B = C \cap B$, nous pouvons aussi considérer $C^B$ comme un sous-espace de l'espace normé B, muni de la norme $\| \;\|_\infty$.

(ii) *Proposition*. $C^B$ est un sous-espace fermé de B, autrement dit : une limite *uniforme* de fonctions continues bornées est une fonction (bornée et) *continue*.

Démonstration : *Exercice*.

Bien entendu, une limite *simple* (point par point) de fonctions continues bornées n'est pas nécessairement continue, ni bornée.

*Exercice*. Donner des exemples avec X = F = **R**.

Mais la convergence simple peut, avec d'autres hypothèses, entraîner la convergence uniforme :

(iii) *Théorème de Dini*. Si E est un espace métrique *compact* et si $(f_n)$ est une suite *croissante* [ou une suite décroissante] de fonctions continues de E dans **R** tendant simplement vers une fonction *continue* $f$, alors la convergence est uniforme.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, nous cherchons un entier $N$ tel que pour $n \geq N$, on ait pour tout $x$ dans E : $f(x) - f_n(x) = \left| f(x) - f_n(x) \right| \leq \varepsilon$. Puisque $(f_n)$ tend vers $f$ simplement, il existe, pour chaque $x$ dans E, un entier $p(x)$ tel que $n \geq p(x)$ entraîne $f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon / 3$. Puisque $f$ et $f_{p(x)}$ sont continues, il existe un voisinage ouvert $U_x$ de $x$ dans E tel que : $y \in U_x \Rightarrow \left| f(x) - f(y) \right| \leq \varepsilon / 3$ et $\left| f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y) \right| \leq \varepsilon / 3$. Du recouvrement de E par les $U_x$ , extrayons un recouvrement fini : $E = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Soit $N = \max(p(x_1), \ldots, p(x_k))$, et considérons un point $y$ quelconque dans E ; on a $y \in U_{x_i}$ pour un $i \in \{1, \ldots, k\}$, d'où si $n \geq N$ :

$$f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_{p(x_i)}(y)$$
$$\leq \left| f(y) - f(x_i) \right| + f(x_i) - f_{p(x_i)}(x_i) + \left| f_{p(x_i)}(x_i) - f_{p(x_i)}(y) \right| \leq \varepsilon .$$

## 1.3 Fonctions continues à support compact, fonctions semi-continues, espaces de Fréchet

*(partie hors-programme sauf la définition (a) de la Sect.* (**1.3.1**) *et le début de la Sect.* (**1.3.2**), *i.e. jusqu'à la définition (b), à l'exception de la proposition (i) qui est hors-programme)*

### (1.3.1) *Théorème de Tietze-Urysohn et fonctions continues à support compact*

(i) *Théorème de Tietze-Urysohn (admis).* Soient X un espace métrique, F un fermé de X et $f$ une fonction continue bornée de F dans **R**. Posons $m$ = inf $\{f(x);\ x\in \mathrm{F}\}$et $M$ = sup $\{f(x);\ x\in \mathrm{F}\}$. Il existe un *prolongement continu g* de $f$ à X tout entier qui n'agrandit pas les bornes de $f$, i.e. inf $\{g(x);\ x\in \mathrm{X}\}= m$ et sup $\{g(x);\ x\in \mathrm{X}\}= M$.

(ii) *Corollaire*. Soient X un espace métrique, A et B deux fermés de X, d'intersection vide. Il existe une fonction continue de X dans [0,1], telle que ses restrictions soient $f_{|\mathrm{A}} \equiv 1$ et $f_{|\mathrm{B}} \equiv 0$.

Le corollaire est obtenu en prenant F=A∪B dans le théorème et en définissant $f$ par $f(x) = 1$ si $x\in$ A et $f(x) = 0$ si $x\in$ B. Montrons que cette fonction est continue de F dans **R**. Si $x\in$ A, il existe, puisque $x\notin$ B et que B est fermé, un voisinage V de $x$ dans X qui ne coupe pas B. Alors W=V∩F est un voisinage de $x$ dans F qui ne coupe pas B, et qui est donc inclus dans A, ce qui entraîne que l'on a $f(y) = f(x) = 1$ pour $y\in$ W. Ainsi $f$ est continue dans A, et de même dans B.

*(a) Définition*. Soit $f$ une fonction définie sur un espace métrique X, à valeurs réelles ou complexes. On appelle *support* de $f$, et on note Supp($f$), *l'adhérence* (dans X) de $\left\{x \in \mathrm{X};\ f(x) \neq 0\right\}$. Si Supp($f$) est compact, on dit que $f$ est une *fonction à support compact*.

Ainsi, Supp($f$) est le plus petit fermé F tel que $f$ s'annule sur X \ F, ou encore X \ Supp($f$) est le plus grand ouvert sur lequel $f$ est identiquement nulle. Lorsque l'espace de départ X est un espace normé de dimension finie, i.e. essentiellement lorsque X est un $\mathbf{R}^n$, dire que Supp($f$) est compact revient à dire qu'il est tout simplement *borné*, puisque par construction Supp($f$) est fermé et que dans ces espaces les compacts sont les parties fermées bornées **(1.2.3** (iii)**)**.

*Exercice*. Montrer que Supp($fg$)⊂ [Supp($f$)∩Supp($g$)].

(iii) *Proposition*. Soient U un ouvert d'un espace métrique localement compact X, et K un compact contenu dans U. Il existe une fonction $f$, continue à support compact contenu dans U, qui est égale à 1 dans K et prend ses valeurs dans [0, 1].

La nouveauté par rapport au corollaire (ii) est que Supp($f$) doit être compact : c'est ceci qui demande l'hypothèse que X soit localement compact, et un peu de travail. Nous allons trouver un *voisinage compact de* K *dans* U, i.e. un compact K' inclus dans U et contenant un ouvert V de U tel que V⊃K (donc U⊃K'⊃V⊃K). Puisque U est ouvert dans X, V sera donc aussi un ouvert de X et il suffira alors d'appliquer le corollaire avec A = K et B = X\V pour conclure.

Puisque U est ouvert dans X, U est un espace localement compact **(1.1.7** (viii)**)**, donc tout point $x$ de K possède un voisinage compact $\mathrm{K}_x$ dans U, i.e. il existe un ouvert $\mathrm{V}_x$ de U tel que $x \in \mathrm{V}_x \subset \mathrm{K}_x \subset \mathrm{U}$. Comme K est compact, on peut, parmi les ouverts $\mathrm{V}_x$, en trouver un nombre fini, soit $\mathrm{V}_{x_1}, \dots, \mathrm{V}_{x_n}$, dont la réunion contienne K. Posons alors V= $\mathrm{V}_{x_1}\cup\dots\cup\mathrm{V}_{x_n}$ et K'= $\mathrm{K}_{x_1}\cup\dots\cup\mathrm{K}_{x_n}$ : V est un ouvert de U, K' est compact comme réunion finie de compacts, et l'on a U⊃K'⊃V⊃K. La démonstration est terminée.

**(1.3.2)** *Fonctions semi-continues*

L'intégrale est une forme linéaire $f \to \int f(x)\, dx$ qui, au niveau élémentaire, n'est définie que pour les fonctions continues définies sur un intervalle compact de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Dans ce cours, on construira l'intégration au sens de Lebesgue par un procédé de *prolongement* de cette forme linéaire, depuis l'espace des fonctions continues à support compact (définies sur un espace plus général que $\mathbf{R}^n$) jusqu'à un espace fonctionnel plus vaste, comprenant aussi des fonctions beaucoup moins régulières que les fonctions continues- et sans exiger que leur support soit compact. Ces fonctions seront tout naturellement appelées "intégrables". Le prolongement se fera en plusieurs étapes. Dans la première étape, deux classes de fonctions vont jouer un rôle important : les fonctions semi-continues inférieurement et les fonctions semi-continues supérieurement. Il faut donc définir cette "semi-continuité".

On va, dans cette section et au chapitre 2 (intégration), considérer des fonctions numériques non nécessairement finies, i.e. des applications d'un ensemble X dans $\overline{\mathbf{R}}$, qui peuvent prendre des valeurs réelles *aussi bien que les valeurs* $-\infty$ *et* $+\infty$*;* on utilisera les règles usuelles $\infty + \infty = \infty$, $\infty.\infty = \infty$, $1/\infty = 0$, etc.

*(a) Définition*. Soient X un espace métrique (ou seulement un espace topologique) et $f$ une application de X dans $\overline{\mathbf{R}}$ On dit que $f$ est *semi-continue inférieurement* (*s.c.i.*) au point $x_0$ de X si, quel que soit $\alpha < f(x_0)$, il existe un voisinage V de $x_0$ dans X tel que $[x \in V] \Rightarrow [\alpha < f(x)]$.

Autrement dit, "la fonction ne saute pas *vers le bas*", d'où l'adverbe. Symétriquement, une fonction semi-continue *supérieurement* (s.c.s.) au point $x_0$, $g$, ne saute pas *vers le haut*, i.e. est telle que $\forall \beta > g(x_0)$, il existe un voisinage V' de $x_0$ dans X tel que $[x \in V'] \Rightarrow [\beta > g(x)]$, ce qui revient à dire que $f = -g$ est s.c.i. au point $x_0$. Une fonction qui est à la fois s.c.i. et s.c.s. en $x_0$ est continue en $x_0$ (en tant que fonction de X dans $\overline{\mathbf{R}}$ ) car, pour tout intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ de $\overline{\mathbf{R}}$ contenant $f(x_0)$, il existe un voisinage $W = V \cap V'$ de $x_0$ tel que $[x \in W] \Rightarrow [\alpha < f(x) < \beta]$. D'où l'adjectif "semi-continue". Si $f(x_0) = -\infty$, alors $f$ est s.c.i. en $x_0$ car il n'existe aucun $\alpha$, fini ou infini, tel que $\alpha < f(x_0)$. Si $f$ est s.c.i. (resp. s.c.s.) dans X, on dira simplement que $f$ est s.c.i. (resp. s.c.s.).

(i) *Proposition*. Pour que $f$ soit s.c.i., il faut et il suffit que, $\forall \alpha \in \overline{\mathbf{R}}$, l'ensemble

$$U_\alpha = \{x \in X;\ \alpha < f(x)\}$$

soit ouvert.

Un ensemble ouvert est un ensemble qui constitue un voisinage pour chacun de ses points **(1.1.3** (vi)**).** Or, la définition d'une fonction s.c.i. en un point $x_0$ revient à dire que, si l'on a $\alpha < f(x_0)$, i.e. si l'on a $x_0 \in U_\alpha$, alors il existe un voisinage V de $x_0$ qui soit contenu dans $U_\alpha$. Si $U_\alpha$ est toujours un ouvert, il suffit donc de prendre $V = U_\alpha$. Et inversement, si $f$ est s.c.i., alors $U_\alpha$ est bien un voisinage de chacun de ses points $x_0$, puisqu'il contient le V postulé dans la définition.

*(b) Définition*. Soit A une partie d'un ensemble X. On appelle *fonction caractéristique de* A, la fonction $\chi_A$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

*Exercice*. Vérifier que $\chi_{E\backslash A} = 1 - \chi_A$ , $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$ , $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$ .

(ii) *Proposition*. Pour que A soit ouverte dans X, il faut et il suffit que $\chi_A$ soit s.c.i..

Pour utiliser la caractérisation (i), identifions les ensembles $U_\alpha$. Comme $\chi_A$ ne prend que les valeurs 0 et 1, on a $U_\alpha = A$ si $\alpha \geq 0$ et $U_\alpha = X$ si $\alpha < 0$. L'équivalence est donc claire.

(iii) *Proposition*. Soient $f$ et $g$ deux fonctions s.c.i. au point $x_0$. Alors sup($f$, $g$) et inf ($f$, $g$) sont s.c.i. au point $x_0$. Si $f + g$ est partout définie (mais pas forcément finie! les cas à exclure sont les cas d'indétermination $\infty - \infty$), alors elle est s.c.i. au point $x_0$.

Pour la somme, on peut écrire tout nombre $\alpha$ tel que $\alpha < f(x_0) + g(x_0)$, sous la forme $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta < f(x_0)$ et $\gamma < g(x_0)$ et il suffit d'appliquer la définition. Les autres se démontrent de façon analogue.

(iv) *Proposition*. Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions s.c.i., alors $g = \sup\limits_{i\in I}\left(f_i\right)$ est s.c.i..

Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$. Pour que $\alpha < g(x)$, il faut et il suffit qu'il existe un $i \in I$ tel que $\alpha < f_i(x)$, donc l'ensemble $U_\alpha$ de la proposition (i) correspondant à $g$ est la réunion des $U_\alpha$ correspondant aux $f_i$, et par suite est un ouvert puisque les $f_i$ sont s.c.i. (i). Donc $g$ est s.c.i..

On ne peut pas s'attendre à ce qu'une fonction semi-continue vérifie lim $f(x_n) = f(\lim x_n)$, mais seulement à ce qu'on ait une inégalité. Celle-ci nécessite les notions de limites inférieure et supérieure, qui sont vraisemblablement déjà connues des étudiants.

*Définition*. Soit $(x_n)$ une suite de points de $\overline{\mathbf{R}}$. La suite formée des $y_n = \inf\{\, x_m\,;\, m \geq n\}$ est une suite croissante et la suite des $z_n = \sup\{\, x_m\,;\, m \geq n\}$ est une suite décroissante. Chacune de ces deux suites admet donc une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$; on les appelle respectivement limite inférieure et limite supérieure de la suite $(x_n)$ et on note $\underline{\lim}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ , $\overline{\lim}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

(v) *Proposition*. Soient X un espace métrique et $f$ une fonction s.c.i. au point $x_0$ de X. Si une suite $(x_n)$ de points de X tend vers $x_0$, alors on a $\underline{\lim}\, f(x_n) \geq f(x_0) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$.

En écrivant successivement que $f$ est s.c.i. au point $x_0$ et que $(x_n)$ tend vers $x_0$, on voit que, quel que soit $\alpha < f(x_0)$, il existe un entier $N$ tel que $n \geq N$ entraîne $f(x_n) > \alpha$ . Par suite, quel que soit $\alpha < f(x_0)$, on a $\underline{\lim}\, f(x_n) > \alpha$ , ce qui signifie bien que $\underline{\lim}\, f(x_n) \geq f(x_0)$.

**(1.3.3)** *Espaces métriques localement compacts séparables.*

Les espaces métriques localement compacts ne ressemblent pas assez à $\mathbf{R}^p$ pour que la théorie de l'intégration y soit aussi simple. En effet $\mathbf{R}^p$, comme $\mathbf{R}$, a encore la propriété qu'il existe un ensemble *dénombrable* qui est dense dans $\mathbf{R}^p$, par exemple $\mathbf{Q}^p$ (en effet, on a vu **(1.1.4)** que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$). Un espace métrique dans lequel existe une *partie dense dénombrable* est dit *séparable*. On démontre que tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable. Les espaces métriques localement compacts séparables restent des objets beaucoup plus généraux que les $\mathbf{R}^p$, par exemple on ne peut pas (en l'absence de structure supplémentaire) y faire de calcul *différentiel*. Cette généralité est importante en calcul des probabilités. La séparabilité entraîne successivement les deux conséquences suivantes :

(i) *Théorème (admis)*. Soit X un espace métrique séparable et localement compact. Alors il existe une suite $(U_n)$ d'ouverts dont la réunion est X et tels que pour tout $n$, l'adhérence $\overline{U_n}$ soit un compact inclus dans $U_{n+1}$.

Par exemple, si X = $\mathbf{R}^p$, il suffit de prendre pour $U_n$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $n$.

(ii) *Théorème (admis).* Soient X un espace métrique séparable et localement compact et $f$ une fonction s.c.i. de X dans $\overline{\mathbf{R}}$. Si $f$ est minorée par une fonction finie $g$ continue à support compact ($f \geq g$), alors il existe une suite croissante ($f_n$) de fonctions finies continues à support compact telle que $f = \sup_n \left( f_n \right)$.

### (1.3.4) *Notions sur les espaces localement convexes et les espaces de Fréchet (hors-programme)*

*Définitions.*

(a) Soient $E_1$ et $E_2$ deux ensembles et $\mathcal{O}_1$ (resp. $\mathcal{O}_2$) une topologie sur $E_1$ (resp. sur $E_2$). La famille de parties de $E_1$x$E_2$ constituée par les *réunions* quelconques d'ensembles de la forme $A_1$ x$A_2$, avec $A_1 \in \mathcal{O}_1$ et $A_2 \in \mathcal{O}_2$, est une topologie $\mathcal{O}$ sur le produit cartésien $E_1$x$E_2$ (vérifier). Cette topologie est dite *topologie produit* de $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$.

(b) Soient E un espace vectoriel (sur **F**, **F** = **R** ou **C**) et $\mathcal{O}$ une topologie sur l'ensemble E. On dit que E muni de $\mathcal{O}$ est un *espace vectoriel topologique*, ou que $\mathcal{O}$ est *compatible avec la structure d'espace vectoriel*, si les applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda . x$ de ExE dans E et de **F**xE dans E sont *continues* (les produits ExE et **F**xE étant munis des topologies produits).

(c) Soit E un espace vectoriel. On appelle *semi-norme sur* E, une application $p$ de E dans $\mathbf{R}_+$ .vérifiant l'homogénéité de degré un et l'inégalité du triangle (II et III dans **(1.2.1)**), mais pas nécessairement (contrairement à une "vraie" norme) la propriété que $p(x)$=0 entraîne $x$=0.

Soient E un espace vectoriel et $(p_i)_{i \in I}$ une *famille quelconque de semi-normes sur* E. Si $x$ est un point de E, J une sous-famille *finie* de I et $(r_j)_{j \in J}$ un ensemble fini de "rayons" avec $r_j > 0$, définissons une "*polyboule de centre x et de rayons $r_j$* pour $j \in$ J" comme l'intersection de "pseudo-boules" de centre $x$ et de rayon $r_j$ de E :

$$P(x, J, (r_j)) = \{y \in E;\ p_j(y - x) < r_j \text{ pour tout } j \in J\}. \tag{1}$$

Définissons les ouverts comme dans un espace métrique mais en remplaçant les boules par les polyboules, i.e. disons qu'une partie U de E est ouverte si pour tout point $x$ de U, il existe une polyboule centrée en $x$ et contenue dans U. On vérifiera que ceci définit une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel (en particulier, cette topologie est évidemmment invariante par translation et par dilatation, i.e.: si U est ouvert, le translaté de U par $x$ et le dilaté de U par un facteur $\lambda > 0$ sont encore des ouverts).

(d) On appelle *espace localement convexe* un tel espace vectoriel topologique E, i.e. un espace vectoriel muni d'une famille de semi-normes.

On notera qu'une même topologie (le même ensemble d'ouverts) peut être défini(e) à partir de familles *différentes* de semi-normes (de même qu'une topologie d'espace normé peut être définie par des normes différentes, pourvu qu'elles soient équivalentes au sens de la définition donnée dans **(1.2.3)**). Considérons un espace localement convexe E, et supposons ($\alpha$) que sa topologie $\mathcal{O}$ *peut* être définie par le procédé (d) à partir d'une *suite* $(p_n)_{n \geq 1}$ de semi-normes, et ($\beta$) que $\mathcal{O}$ soit *séparée* (i.e. que deux points différents de E admettent des voisinages sans point commun; les topologies non séparées sont très "pathologiques", par exemple une suite peut avoir plusieurs limites). On démontre qu'alors la topologie de E *peut* être définie par une *distance invariante par translation*, autrement dit est celle d'un "espace vectoriel métrique" (l'invariance par translation signifie l'homogénéité de cet espace, dans le sens utilisé en physique).

*Exercice*. Montrer que si, dans l'hypothèse ($\alpha$), on remplace "suite (infinie)" par "suite finie" $(p_n)_{1 \leq n \leq k}$ ,on obtient simplement un espace *normé*. Pour cela on montrera que :

1) $p = \sup_{1 \leq n \leq k} p_n$ est encore une semi-norme ;
2) $p$ définit la même topologie (les mêmes ouverts) que la famille $(p_n)_{1 \leq n \leq k}$ ;

3) si la topologie définie par une seule semi-norme $p$ est séparée, alors $p$ est une norme.

(i) *Proposition*. Soit E un espace localement convexe dont la topologie est séparée et *peut* être définie par une suite de semi-normes, et soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille (*quelconque*) de semi-normes *définissant la topologie de* E. Pour qu'une suite $(x_m)$ de points de E soit une suite de Cauchy pour une distance invariante par translation, il faut et il suffit que, pour toute polyboule P de centre 0 et de rayons $r_j$ pour $j\in$ J (J étant une partie finie de I), il existe un entier $N$ tel que

$$[\ l \geq N \text{ et } m \geq N\ ] \Rightarrow [\ (x_l - x_m) \in \mathrm{P}, \text{ i.e. } p_j\,(x_l - x_m) < r_j \text{ pour } j\in \mathrm{J}\ ]. \qquad (2)$$

L'hypothèse sur E entraîne l'existence d'une distance $d$ invariante par translation, et définissant la topologie de E, i.e. celle associée à la famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes. Dire que la suite $(x_m)$ est une suite de Cauchy pour $d$ signifie que, pour tout $\eta>0$, il existe un entier $N = N(\eta)$ tel que
$[\ l \geq N$ et $m \geq N\ ] \Rightarrow [\ d(x_l, x_m) = d(0, x_l - x_m) < \eta$, i.e. $(x_l - x_m) \in$ B(0, $\eta$)]. (3)

Soit alors une polyboule P comme dans l'énoncé : elle définit un ouvert de E contenant 0, donc il existe une boule B(0, $\eta$) de $d$ qui soit contenue dans P. Donc, si $(x_m)$ est une suite de Cauchy pour $d$, il suffit de prendre $N=N(\eta)$ pour satisfaire (2). Inversement, supposons que, pour toute polyboule P de l'énoncé, on puisse trouver $N$ pour satisfaire (2). Si l'on se donne $\eta>0$, il existe une polyboule P de l'énoncé qui soit contenue dans B(0, $\eta$) ; donc, si $N$ est tel que (2) soit satisfaite, alors (3) le sera aussi. On utilise bien l'égalité des topologies, pas une simple inclusion.

Cette proposition signifie que la propriété qu'une suite soit une suite de Cauchy pour *une* distance invariante par translation ne dépend que de la topologie de E, et reste valable pour *toute* distance invariante par translation. La propriété que E soit complet pour une distance invariante par translation, ne dépend donc pas du choix de cette distance.

Toute polyboule P(0, J, $(r_j)$) s'obtenant comme l'intersection finie (pour $j\in$ J) des pseudo-boules ($p_j(x)<r_j$), on peut encore traduire la proposition (i) de la façon suivante :

(ii) *Proposition*. Soit E un espace localement convexe dont la topologie est séparée et peut être définie par une suite de semi-normes, et soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de E. Pour qu'une suite $(x_m)$ de points de E soit une suite de Cauchy pour une distance invariante par translation, il faut et il suffit que, pour tout indice $i\in$ I et tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier $N$ tel que

$$[\ l \geq N \text{ et } m \geq N\ ] \Rightarrow [\ p_i\,(x_l - x_m) < \varepsilon\ ]. \qquad (4)$$

Les topologies localement convexes séparées sont, par ailleurs, faciles à reconnaître :

(iii) *Proposition*. Soient E un espace localement convexe et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de E. Pour que cette topologie soit séparée, il faut et il suffit que, pour tout $x\in$ E tel que $x\neq 0$, il existe un indice $i\in$ I tel que $p_i(x)\neq 0$.

D'après la définition d'une topologie séparée et l'invariance de la topologie par translation, ce qui caractérise une topologie séparée (parmi les topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel) est que, si $x\neq 0$, il existe un voisinage de 0 qui ne contient pas $x$. Ici, un voisinage de 0 est un ensemble contenant une polyboule P(0, J, $(r_j)$). Dire qu'il existe un voisinage de 0 qui ne contient pas $x$ revient donc à dire qu'il existe une partie finie J de I, un $j\in$ J et un $r_j>0$ tels que $p_j(x)\geq r_j$, i.e. en fait qu'il existe un indice $i\in$ I tel que $p_i(x)\neq 0$.

(e) On appelle *espace de Fréchet* un espace localement convexe séparé dont la topologie peut être définie par une *suite* de semi-normes et qui est un espace métrique *complet* pour une (et donc pour toute) distance invariante par translation.

*Exemples d'espaces de Fréchet*

Bien entendu, tout espace de Banach E est aussi un espace de Fréchet (il suffit de prendre, pour tout $n$, la norme sur E comme semi-norme $p_n$). Nous connaissons déjà d'assez nombreux espaces de Banach (Sections **(1.2.2)**, **(1.2.3)** et **(1.2.4)**).

Un exemple d'espace de Fréchet qui ne soit pas en général un espace normé est l'espace C = C (X, F) introduit dans **(1.2.1)**, lorsque l'espace métrique X est séparable et localement compact et F est un espace de Banach (par exemple le corps des scalaires). On munit C de la topologie localement convexe définie par les semi-normes suivantes :

$$p_{\mathrm{K}}(f) = \sup \{\|f(x)\| \,;\, x\in \mathrm{K}\}, \tag{5}$$

où K est un compact quelconque de X [$p_{\mathrm{K}}(f)$ est fini, cf. **(1.1.7** (v) et (iii)**)**]. Pour voir que cette topologie est séparée, il suffit (iii) de vérifier que, si $f$ n'est pas la fonction nulle de X dans F, alors il existe un compact K tel que $p_{\mathrm{K}}(f) \neq 0$; mais si $f \neq 0$, il existe un $x$ dans X tel que $f(x) \neq 0$, et il suffit de prendre pour K un voisinage compact de $x$. Soit $(\mathrm{U}_n)$ une suite croissante d'ouverts comme dans le théorème **(1.3.3** (i)**)**. Montrons que les semi-normes $p_{\mathrm{K}_n}$, avec $\mathrm{K}_n = \overline{\mathrm{U}_n}$, suffisent à définir la topologie introduite, i.e. que tout ouvert de cette topologie (définie par les semi-normes (5) avec K un compact *quelconque* de X) est aussi un ouvert de la topologie définie par la suite ($p_{\mathrm{K}_n}$). En raison de l'invariance par translation, il s'agit seulement de montrer que si $\mathrm{K}'_1,\dots,\mathrm{K}'_k$ sont des compacts quelconques de X et $r_1,\dots,r_k$ des réels > 0, il existe une polyboule centrée en 0, définie par une ou plusieurs semi-normes $p_{\mathrm{K}_n}$ *de la suite*, qui soit contenue dans la polyboule P(0, J, $(r_j)_{1\le j\le k}$) définie par les semi-normes $p_{\mathrm{K}'_j}$. Pour cela il suffira de montrer que $\mathrm{K}' = \mathrm{K}'_1 \cup\dots\cup \mathrm{K}'_k$ est contenu dans un certain $\mathrm{K}_n$ puisqu'on aura alors, d'après la définition (5) : $\sup\limits_{1\le i\le k} p_{\mathrm{K}'_i} \le p_{\mathrm{K}_n}$. Or les $\mathrm{U}_n$ recouvrent X; ils recouvrent donc K', ainsi le compact K' est recouvert par un nombre fini d'ouverts $\mathrm{U}_n$ . Mais comme les $\mathrm{U}_n$ forment une suite croissante, il en existe donc un qui contient K'; a fortiori K' est contenu dans l'adhérence $\mathrm{K}_n$ de cet $\mathrm{U}_n$ .

Montrons maintenant que C (X, F) est complet pour toute distance invariante par translation qui définit sa topologie, i.e. la topologie associée aux semi-normes (5). D'après la proposition (ii) et la définition (5), pour qu'une suite $(f_m)$ de fonctions de C soit une suite de Cauchy, il faut et il suffit que, pour tout compact K de X, la suite $(f_m{}_{|\mathrm{K}})$ des *restrictions* à K soit une suite de Cauchy pour la *norme* (sur C (K, F)) de la convergence uniforme sur K. On dit que cette topologie est celle de la *convergence uniforme sur tout compact*. D'après ce qui précède, c'est encore la topologie de la convergence uniforme sur chaque $\mathrm{K}_n$ de la suite. Or, nous savons par **(1.2.4** (ii)**)** que, pour tout espace métrique compact K, C (K, F) est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme sur K. Si donc une suite $(f_m)$ de fonctions de C (X, F) est une suite de Cauchy, alors, pour tout entier $n$, la suite $(f_{m|\mathrm{K}_n})_{m\ge 1}$ des restrictions à $\mathrm{K}_n$ admet une limite $g_n$ qui est une fonction continue de $\mathrm{K}_n$ dans F. Si $n' \ge n$, on a $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{K}_{n'}$. Si $x\in \mathrm{K}_n$ , $g_{n'}(x)$, tout comme $g_n(x)$, est la limite ponctuelle de $f_m(x)$ quand $m\to\infty$, donc la restriction de $g_{n'}$ à $\mathrm{K}_n$ coïncide avec $g_n$. Puisque X est la réunion des $\mathrm{K}_n$ , on définit donc une application $g$ de X dans F en posant $g(x) = g_n(x)$ si $x\in \mathrm{K}_n$. Comme $\mathrm{K}_n$ contient l'ouvert $\mathrm{U}_n$ de X et comme la restriction $g_n$ de $g$ à $\mathrm{K}_n$ est une application continue de $\mathrm{K}_n$ dans F, $g$ est continue en tout point de $\mathrm{U}_n$ . Mais X étant la réunion des $\mathrm{U}_n$, $g$ est donc continue dans X. Par construction, la restriction de $f_m$ à $\mathrm{K}_n$ converge uniformément, lorsque $m\to\infty$, vers la restriction de $g$ à $\mathrm{K}_n$ , cqfd.

Nous terminerons par l'énoncé d'un résultat frappant :

(iv) *Théorème* (corollaire du "théorème de Banach-Steinhaus", dont l'énoncé ne sera pas donné).

Si E est un espace de Fréchet (en particulier, si E est un espace de Banach) et F un espace normé, et si une suite $(u_n)$ d'applications linéaires continues de E dans F a une limite *simple* $u$, alors $u$ est une application linéaire *continue*.

Rappel : $[u_n \to u$ simplement$] \Leftrightarrow [\forall x\in \mathrm{E},\ u_n(x) \to u(x)]$. La linéarité de $u$ est facile à vérifier, mais la continuité est un résultat assez puissant, que nous admettrons.