Equations de Dirac dans un espace-temps courbe & Mécanique quantique associée

Mayeul Arminjon

Labo. "Sols, Solides, Structures, Risques", Grenoble

Séminaire de Physique Mathématique
Institut Fourier, 24 janvier 2011

Plan

- Motivation physique
- Transformation de l'équation de Dirac dans l'espace-temps plat de Minkowski
- Espace-temps général : un cadre géométrique commun
- Quatre classes d'équations de Dirac
- Théorèmes d'équivalence entre classes
- Opérateurs hamiltonien et énergie, et leur non-unicité

Motivation physique

- Particules “majeures” (e, p, n, q, ν, ...) : spin 1/2, donc obéissent à l’éqn de Dirac (modifiée, au moins si $\exists$ champ électromagnétique, pour une particule composite comme le neutron n).

- Comportement quantique de particules neutres (neutrons et atomes) dans le champ gravitationnel terrestre : *observé* (interféromètre dans un plan incliné ou transmission par une fente horizontale).

- Ces observations de *mécanique quantique dans le champ de gravitation classique* : peut-être les seuls tests expérimentaux directs de l’interaction entre le quantique et la gravitation...

Motivation physique (suite)

- Aux précisions actuelles, ces observations de mécanique quantique dans le champ de gravitation classique sont analysées avec l'équation de Schrödinger non-relativiste dans le potentiel de gravitation newtonien.
- Amélioration de la précision $\Rightarrow$ A moyen terme, il faudra l'équation de Dirac dans un espace-temps courbe.
- Ce que ces mesures approchent : essentiellement le *spectre énergétique*.
- On cherche donc à calculer le spectre énergétique dans un champ gravitationnel faible ("post-newtonien"), éventuellement avec rotation (de la Terre)
(M.A.: Phys. Rev. D **74**, 065017 (2006); Phys. Lett. A **372**, 2196 (2008))

Motivation physique (fin)

- Eqn de Dirac standard dans un espace-temps courbe : "Dirac-Fock-Weyl" (DFW), déduite de l'éqn originelle par "covariantisation"; lié au *principe d'équivalence.*

- DFW coïncide avec Dirac originel en $X \in$ espace-temps V dans une carte t.q. la métrique $g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} \equiv$ Minkowski *si de* + la connexion *de spin* $= 0$ en X (choix de *tétrade*).

- Le principe d'équivalence stricto sensu serait : DFW coïncide avec Dirac originel en $X \in \mathrm{V}$ dans une carte t.q. $g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu}$ *et* que la connexion *de Levi-Civita* s'annule en X dans cette carte. Il n'est *pas* vérifié.

- Le principe d'équiv. stricto sensu : vérifié par une extension alternative de Dirac à $(\mathrm{V}, g_{\mu\nu})$ courbe, avec *fonction d'onde* ψ **4-vecteur**. (M.A.: Found. Phys. **38**, 1020 (2008))

Transformation de l'équation de Dirac dans l'espace-temps plat M de Minkowski

Soit $\chi : \mathsf{M} \to \mathsf{R}^4$ une carte globale de M.

Soit $\Psi : \mathsf{R}^4 \to \mathsf{C}^4, \quad \mathbf{X} \mapsto \Psi(\mathbf{X})$ l'expression de la fonction d'onde de Dirac ψ dans la carte χ.

On demande qu'après certains changements linéaires de χ : $\chi \hookrightarrow \chi' = L.\chi$ avec $L \in \mathrm{G}$, où G est un sous-groupe de $\mathsf{GL}(4, \mathsf{R})$, Ψ devienne Ψ' t.q.

$$\Psi'(\mathbf{X}') = S.\Psi(\mathbf{X}), \qquad S = \mathsf{S}(L) \in \mathsf{GL}(4, \mathsf{C}), \tag{1}$$

pour une certaine fonction S de la matrice 4×4 $L \in \mathrm{G}$.

Il faut et il suffit que S soit une *représentation* $\mathrm{G} \to \mathsf{GL}(4, \mathsf{C})$.

La même en plus précis

Soient $\chi_0 : \mathsf{M} \to \mathsf{R}^4$ une carte globale de M; G un sous-groupe de $\mathsf{GL}(4,\mathsf{R})$; $\bar{\mathrm{G}}$ l'ensemble des cartes $\chi = L.\chi_0$ pour un $L \in \mathrm{G}$: $\chi : X \mapsto \mathbf{X} = L.\mathbf{X}_0 \in \mathsf{R}^4$, où $\mathbf{X}_0 \equiv \chi_0(X) \in \mathsf{R}^4$.

$\forall$ carte $\chi \in \bar{\mathrm{G}}$, soit $\mathbf{X} \mapsto \Psi_\chi(\mathbf{X}) \in \mathsf{C}^4$ l'expression de la fonction d'onde ψ de Dirac dans la carte χ et dans le champ de bases (e_a) sur le fibré vectoriel E dont ψ est une section.

On veut que lors des changements $\chi \hookrightarrow L.\chi$, la transformation de $\Psi_\chi(\mathbf{X})$ soit linéaire et dépende d'une fonction $\mathsf{S} : \mathrm{G} \to \mathsf{GL}(4,\mathsf{C})$ en sorte que

$$\forall \chi \in \bar{\mathrm{G}}, \ \ \forall L \in \mathrm{G}, \ \ \forall \mathbf{X} \in \mathsf{R}^4, \ \ \Psi_{L.\chi}(L.\mathbf{X}) = \mathsf{S}(L).\Psi_\chi(\mathbf{X}). \qquad (2)$$

Il faut et il suffit que S soit une *représentation* $\mathrm{G} \to \mathsf{GL}(4,\mathsf{C})$.

Transformer l'éqn de Dirac dans l'E.-T. M (suite)

L'éqn de Dirac "plate" contient les matrices de Dirac $\gamma^\mu \in \mathsf{GL}(4, \mathsf{C})$ $(\mu = 0, ..., 3)$. Elle s'écrit : $\underline{\gamma^\mu\,\partial_\mu \Psi = -im\Psi}$. Après le changement de carte $L \in \mathrm{G}$, elle devient

$$\gamma'^\nu\,\partial'_\nu \Psi' = -im\Psi', \quad \gamma'^\nu \equiv L^\nu{}_\mu\, S\gamma^\mu S^{-1}, \quad S \equiv \mathsf{S}(L). \qquad (3)$$

Affirmation usuelle : "*Relativité* $\Rightarrow \gamma'^\nu = \gamma^\nu$" ($\rightarrow$ représentation spinorielle). *Mais non !* Archétype d'une éqn relativiste : éqn de mouvement d'une particule de 4-vitesse U^μ dans le champ électromagnétique F^μ_ν :

$$m\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}s} = qF^\mu_\nu U^\nu, \qquad \text{ou} \quad m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = qFU. \qquad (4)$$

La matrice $F \equiv (F^\mu{}_\nu)$ n'est *pas* invariante : $F' = LFL^{-1} \neq F$.

La fonction d'onde de Dirac comme un 4-scalaire ou comme un 4-vecteur

2 possibilités + simples que la représentation spinorielle pour S

- $\mathsf{S}(L) = \mathbf{1}_4$:

$$\Psi'(\mathbf{X}') = \Psi(\mathbf{X}), \quad \gamma'^{\mu} \equiv L^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}. \tag{5}$$

  I.e., la fonction d'onde de Dirac est un 4-scalaire et l'ensemble des matrices de Dirac se transforme comme un 4-vecteur. *C'est la loi de transformation utilisée pour l'éqn de Dirac standard dans un E-T courbe, DFW.*

- $\mathsf{S}(L) = L$ (M.A.: Found. Phys. Lett. **19**, 225 (2006)) :

$$\Psi'(\mathbf{X}') = L.\Psi(\mathbf{X}), \quad \gamma'^{\mu} \equiv L^{\mu}{}_{\nu}L\gamma^{\nu}L^{-1}. \tag{6}$$

  I.e., la fonction d'onde de Dirac est un 4-vecteur et les composantes $(\gamma^{\mu})^{\rho}{}_{\nu}$ forment un tenseur $\binom{2}{1}$.

$\diamondsuit$ Pour tout couple (G, S) avec G sous-groupe de $\mathsf{GL}(4, \mathsf{R})$ et S représentation de G dans $\mathsf{GL}(4, \mathsf{C})$:

- La relation d'anticommutation est covariante :

$$[\gamma'^{\mu}, \gamma'^{\nu}]_{+} \equiv \gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu} = 2g'^{\mu\nu}\, \mathbf{1}_4 \qquad (7)$$

(avec $g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ si $L \in \mathsf{O}(1,3)$).

- La mécanique quantique associée à l'éqn de Dirac "plate" est la même : dans une carte "galiléenne" (i.e., t.q. $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), l'*équation*, donc ses *solutions*, sont les mêmes. (Le choix du quadruplet (γ^{μ}) n'a pas d'effet sur la MQ : M.A. & F. Reifler, *Braz. J. Phys.* **38**, 248 (2008).)

$\diamondsuit$ Représentation spinorielle : limitée à $L \in \mathsf{SO}(1,3)$. Représentations $\mathsf{S}(L) = \mathbf{1}_4$ (ψ 4-scalaire), et $\mathsf{S}(L) = L$ (ψ 4-vecteur) : valables pour $L \in \mathsf{GL}(4, \mathsf{R}) \Rightarrow$ s'étendent à un E-T général.

Espace-temps général : un cadre géométrique commun aux deux représentations

- Selon que la fonction d'onde ψ est un 4-scalaire ou un 4-vecteur, elle vit dans deux fibrés vectoriels différents (de base V, la variété espace-temps), de dimension 4, notés E:

  - $\mathrm{E} = \text{fibré trivial } \mathrm{V} \times \mathsf{C}^4 \qquad \text{pour} \quad \psi \quad 4-\text{scalaire}$

    ("Quadruplet Representation of the Dirac field", **QRD**)

  - $\mathrm{E} = \text{fibré tangent complexifié } \mathrm{T}_{\mathsf{C}}\mathrm{V} \qquad \text{pour} \quad \psi \quad 4-\text{vecteur}$

    ("Tensor Representation of the Dirac field", **TRD**)

- Les autres objets pertinents (par ex. le champ de matrices de Dirac) vivent dans des fibrés “composés avec E”.

Le cadre géométrique (suite)

Le "champ intrinsèque de matrices de Dirac" γ est défini comme une section globale du produit tensoriel $\mathrm{TV} \otimes \mathrm{E} \otimes \mathrm{E}^\circ$, où E° est le fibré vectoriel dual de E.

Les "vraies" matrices de Dirac γ^μ $(\mu = 0, ..., 3)$ sont locales, et sont faites avec les composantes de γ:

$$(\gamma^\mu)^a{}_b \equiv \gamma^{\mu a}_b \quad (a, b = 0, ..., 3). \tag{8}$$

◇ Elles dépendent de la base naturelle locale (∂_μ) sur $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, du champ de bases local (e_a) sur E (au-dessus de U), et du champ de bases dual (θ^b) sur E°.

◇ Elles doivent vérifier ($\forall$ carte (χ, U) et $\forall$ champ de bases (e_a) de E sur U) la relation d'anticommutation $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}\, \mathbf{1}_4$.

Le cadre géométrique (fin)

- Pour QRD ($\mathrm{E} = \mathrm{V} \times \mathrm{C}^4$), la base canonique (E_a) de C^4 est un champ de bases privilégié sur E, d'où le caractère scalaire de la fonction d'onde ψ, i.e., $\Psi \equiv (\Psi^a)$ invariant.

- Pour TRD ($\mathrm{E} = \mathrm{T}_{\mathrm{C}}\mathrm{V}$), on peut prendre comme champ de bases local sur E, la base naturelle (∂_μ) associée à la carte locale de V utilisée.

  Dans ce cas, lorsqu'on change la carte de V, Ψ se transforme comme un 4-vecteur, et γ se transforme comme un tenseur $\binom{2}{1}$.

La diversité des équations de Dirac

Choisissons arbitrairement

- une représentation, i.e., $\mathrm{E} = \mathrm{V} \times \mathbf{C}^4$ ou $\mathrm{E} = \mathrm{T}_{\mathbf{C}}\mathrm{V}$;
- un "champ intrinsèque de matrices de Dirac", i.e., une section $\gamma \in \Gamma(\mathrm{TV} \otimes \mathrm{E} \otimes \mathrm{E}^\circ)$ t.q. les matrices de Dirac associées γ^μ (qui dépendent de la carte locale sur V et du champ de bases local sur E) satisfassent la relation d'anticommutation covariante $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_4$;
- une connexion $D : \Gamma(\mathrm{E}) \ni \psi \mapsto D\psi \in \Gamma(\mathrm{TV}^\circ \otimes \mathrm{E})$ sur E.

Alors on peut écrire une équation de Dirac (et une seule) :

$$\gamma : D\psi \left(= \gamma^{\mu a}_{b} (D\psi)^{b}_{\mu}\, e_a \right) = -im\psi. \tag{9}$$

Elle dépend de chacun des 3 choix. (MA-FR, arXiv:1012.2327)

Quatre classes d'équations de Dirac

1) *L'équation standard,* Dirac-Fock-Weyl, est une éqn QRD ($\mathrm{E} = \mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$), obtenue lorsque (Brill-Wheeler 1957, Chapman-Leiter 1976, ...) :

- le champ γ est déduit d'un quadruplet constant $(\gamma^{\sharp\alpha})$ de matrices de Dirac "plates" et d'un *champ de tétrades* orthonormal global (u_α) sur TV (i.e.: une section du fibré O des bases orthonormées directes de TV) :

$$\gamma = (\gamma^{\sharp\alpha})^a{}_b \, u_\alpha \otimes E_a \otimes \Theta^b \quad [\Leftrightarrow \gamma^\mu = a^\mu{}_\alpha \, \gamma^{\sharp\alpha}] \tag{10}$$

  ((E_a) = base canonique de C^4, (Θ^a) = base duale);

- la connexion D sur $\mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$ dépend de γ de telle sorte que $D\gamma = 0$.

L'équation standard DFW (suite)

NB1 : Si l'on a un nouveau champ de tétrades $(\widetilde{u}_\beta)$, il se déduit du premier (u_α) par une "transformation de Lorentz locale", i.e., par une application différentiable (globale !) :

$$\exists L = (L^\alpha{}_\beta) \ : \mathrm{V} \rightarrow \mathsf{SO}(1,3)\,; \quad \widetilde{u}_\beta = L^\alpha{}_\beta\, u_\alpha. \tag{11}$$

Localement (sur $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$), on peut "relever" L en une application différentiable $S : \mathrm{U} \rightarrow \mathsf{Spin}(1,3)$ t.q. $\Lambda \circ S = L$, où $\Lambda : \mathsf{Spin}(1,3) \rightarrow \mathsf{SO}(1,3)$ est le revêtement double de $\mathsf{SO}(1,3)$.

Dans U on a $\underline{\widetilde{\gamma}^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S}$, et les champs γ et $\widetilde{\gamma}$ donnent des éqs. DFW équivalentes (en posant $\widetilde{\Psi} \equiv S^{-1}\Psi$).

Si V est simplement connexe, ceci se produit globalement $(\mathrm{U} = \mathrm{V})$ (Isham 1978).

Mais on peut aussi changer les matrices “plates” $(\gamma^{\sharp\alpha})$. Ceci fait intervenir une similarité $S \in \mathsf{U}(4)$ voire $\mathsf{GL}(4, \mathsf{C})$, pas $\mathsf{Spin}(1, 3)$...

NB2 : En maths pures on définit d’abord une “structure spinorielle”. Selon Isham 1978 : (f, F) avec F un fibré de “bases de spin” (un fibré principal de base V et de groupe $\mathsf{Spin}(1, 3)$) et $f : \mathrm{F} \to \mathrm{O}$ t.q. $\forall S \in \mathsf{Spin}(1, 3) \quad \forall \underline{e} \in \mathrm{F} \quad f(S\underline{e}) = \Lambda(S) f(\underline{e})$.

Lorsque V “admet une structure spinorielle”, il existe un champ de tétrades orthonormal (u_α) sur TV (Geroch 1968). Dans ce cas, avec les deux fibrés possibles que nous considérons pour ψ, i.e. $\mathrm{E} = \mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$ ou $\mathrm{E} = \mathrm{T}_{\mathsf{C}}\mathrm{V}$, il existe au moins un “champ intrinsèque de matrices de Dirac” $\gamma \in \Gamma(\mathrm{TV} \otimes \mathrm{E} \otimes \mathrm{E}^\circ)$ (vérifiant la relation d’anticommutation).

Quatre classes d'équations de Dirac (suite)

Pour les trois autres classes (MA-FR, arXiv:1012.2327), la connexion D est fixée a priori, et le champ γ n'est restreint que par la relation d'anticommutation. En général, deux champs $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ donnent des équations de Dirac non-équivalentes.

- 2) Les éqs "QRD–0" posent que $D\,E_a = 0$, avec (E_a) le champ de bases canonique sur $\mathrm{V} \times \mathbb{C}^4$. $(\Rightarrow D_\mu = \partial_\mu.)$

- 3) Les éqs "TRD–0" posent que $D\,e_a = 0$, où (e_a) est un champ de tétrades orthonormal (complexe) sur $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{V}$.

- 4) Pour les éqs "TRD–1", on prend la connexion de Levi-Civita, étendue de TV à $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{V}$.

Théorèmes d'équivalence entre classes

1) Les éqs de Dirac QRD et TRD sont équivalentes lorsque les champs coefficients γ et γ', les connexions D et D', et les fonctions d'onde ψ et ψ' se correspondent par $(E_a) \mapsto (e_a)$, où (e_a) = champ de tétrades global sur $\mathrm{T_C V}$. (Facile.)

2) Soit γ un "champ intrinsèque de matrices de Dirac" et soit D une connexion sur E. Soit D' une autre connexion sur E.

$\exists$ un autre "champ intrinsèque de matrices de Dirac", $\widetilde{\gamma}$, t.q. l'éqn de Dirac basée sur γ et D soit équivalente à celle basée sur $\widetilde{\gamma}$ et D'.

3) 1 + 2 $\Rightarrow$ *L'éqn standard (DFW) équivaut à une éqn TRD–1 (donc avec* ψ **4-vecteur***) dans le même espace-temps.*

L'opérateur hamiltonien (dépend du référentiel)

L'éqn de Dirac $\gamma^\mu D_\mu \Psi = -im\Psi$ sous la forme "Schrödinger" :

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathrm{H}\psi, \qquad (t \equiv x^0), \tag{12}$$

avec

$$\mathrm{H} \equiv m\alpha^0 - i\alpha^j D_j - i(D_0 - \partial_0), \tag{13}$$

$$\alpha^0 \equiv \gamma^0/g^{00}, \qquad \alpha^j \equiv \gamma^0\gamma^j/g^{00}. \tag{14}$$

Pour que les hamiltoniens H and H', avant et après un *changem*$^{\mathrm{t}}$ *de carte,* soient équivalents comme opérateurs, le changem$^{\mathrm{t}}$ de carte doit être **spatial** : $x'^0 = x^0,\ x'^j = f^j((x^k))$. Alors, les 2 membres de l'éq de Schrödinger (12) sont "scalaires" pour DFW, et "vectoriels" pour TRD : **H dépend du référentiel** (congruence 3D de lignes d'univers) considéré. Fait général.

Condition d'invariance du hamiltonien par une similarité locale (DFW)

On cherche quand une *similarité locale* $S(X)$, appliquée au champ des matrices de Dirac γ^μ, laisse H (éq (13)) invariant :

$$\widetilde{\mathrm{H}} = S^{-1}\,\mathrm{H}\,S. \tag{15}$$

Calcul sans problème. NB : pour DFW, les matrices de la connexion, $\Gamma_\mu \equiv D_\mu - \partial_\mu$, changent :

$$\widetilde{\Gamma}_\mu = S^{-1}\Gamma_\mu S + S^{-1}(\partial_\mu S). \tag{16}$$

Résultat : (15) $\Longleftrightarrow$ $S(X)$ indépendant du temps, $\partial_0 S = 0$.

En général $g_{\mu\nu,0} \neq 0$. $\Rightarrow$ tous champs possibles γ^μ dépendent de t $\Rightarrow$ pas moyen de trouver une classe de champs γ^μ s'échangeant avec $\partial_0 S = 0$:
le hamiltonien de Dirac n'est pas unique.

Condition d'invariance de l'opérateur Energie (DFW)

Lorsque le hamiltonien H n'est pas hermitien, on doit utiliser l'opérateur Energie. Coïncide avec la partie hermitienne de H :

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} + \frac{i}{2\sqrt{-g}} B^{-1} \partial_0 \left(\sqrt{-g}\, B\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{H} + \mathrm{H}^{\ddagger}\right), \quad B \equiv A\gamma^0. \quad (17)$$

Calcul sans problème $\Rightarrow$ condition d'invariance de E (pour DFW) :

$$B(\partial_0 S)S^{-1} - \left[B(\partial_0 S)S^{-1}\right]^{\dagger} \equiv 2\left[B(\partial_0 S)S^{-1}\right]^{a} = 0. \quad (18)$$

Les similarités locales $S(X)$ vérifiant (18) sont très particulières. Il y a donc un problème d'unicité sérieux pour DFW (et aussi pour les éqs alternatives, TRD). Le *spectre* de E est lui-même non-unique (MA-FR, arXiv:0905.3686)... Solution de ce Pb à venir...

Résumé

- Dans l’E-T plat, on peut transformer la fonction d’onde de Dirac ψ comme un 4-spineur, *ou* comme un 4-scalaire, *ou* comme un 4-vecteur. Mécanique quantique inchangée.
- Dans un E-T courbe, ψ peut être définie seulement comme un 4-scalaire (standard) *ou* comme un 4-vecteur.
- Un cadre géométrique simple commun aux deux définit$^{\mathrm{s}}$.
- $\forall$ définit$^{\mathrm{n}}$, $\forall$ connexion D, $\forall$ champ γ, une éqn de Dirac.
- Les deux premiers choix sont neutres. *Pas* le choix de γ :
- Dans un référentiel fixé, le hamiltonien, l’opérateur énergie, et son spectre, dépendent du choix de γ.