Equations de Dirac dans un espace-temps courbe et leur mécanique quantique janvier 2010 — juin 2012

Mayeul Arminjon

Laboratoire "Sols, Solides, Structures, Risques",

UMR 5521 CNRS/ Université Joseph Fourier/ Institut National Polytechnique de Grenoble,

BP 53, F-38041 Grenoble cedex 9, France.

Table des matières

1 Motivation

Les expériences de mécanique quantique dans un champ de gravitation sont assez nombreuses et permettent de vérifier le comportement quantique des particules subatomiques et des atomes dans le champ de gravitation (jusqu'ici celui de la Terre) : en plus des expériences d'interférométrie neutronique (Colella-Overhauser-Werner, années 70) et atomique (Kasevich-Chu, Riehle-Bordé et al., années 90), il y a maintenant les mesures de la transmission de neutrons ultra-froids par une fente horizontale, initiées à l'Institut Laue-Langevin (Grenoble), et qui permettent de vérifier la quantification de l'énergie de ces neutrons dans le champ de pesanteur terrestre. A ma connaissance, les effets confirmés par cet ensemble d'expériences sont les seuls effets du couplage général entre la théorie quantique et la gravitation qui aient été *mesurés*. Il est frappant de constater que l'interprétation de toutes les expériences déjà réalisées est faite dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-relativiste. Certes, les atomes ou les neutrons utilisés sont nettement non-relativistes, tant par leur énergie cinétique que par leur énergie potentielle newtonienne, comparées à leur énergie de masse au repos. Il est donc clair que l'emploi de cette équation était justifié. Néanmoins, la gravitation est maintenant décrite dans le cadre de théories relativistes avec un espace-temps courbe, ce qui conduit à formuler des équations d'ondes généralisées.

Ainsi, pour les particules de spin 1/2 qui, en négligeant la gravitation, sont gouvernées par l'équation de Dirac originelle, on peut utiliser la généralisation standard de cette équation à un espace-temps courbe, proposée par Fock et par Weyl : ci-après l'équation *DFW*. Il semble souhaitable de déterminer les prédictions faites par l'équation DFW pour ces expériences, d'abord pour vérifier que l'écart avec la théorie non-relativiste est encore négligeable aux précisions atteintes actuellement — et surtout pour se préparer au moment où ce ne sera plus le cas, qui ouvrira la possibilité d'un test direct de la façon dont nous concevons le couplage entre gravitation et théorie quantique. Il existe une littérature assez fournie sur l'équation DFW et ses applications à diverses situations physiquement intéressantes, par exemple dans un système de coordonnées en rotation et/ou en accélération uniforme dans l'espace-temps de Minkowski, ou dans un champ de gravitation faible, statique ou stationnaire. Pourtant, une comparaison précise avec les prédictions de l'équation de Schrödinger non-relativiste dans le potentiel newtonien n'avait pas été faite à ma connaissance. De plus, la littérature existante semblait peu claire sur certains points importants, comme la signification physique du système de coordonnées, ou comme l'influence éventuelle du choix très large du champ de tétrades qui détermine le champ de matrices de Dirac γ^μ (i.e. le coefficient de l'équation DFW). Varjú & Ryder [Phys. Rev. D **62**, 024016 (2000)] remarquaient qu'"il y a malheureusement un certain désaccord entre les différents papiers". Enfin, j'avais pu antérieurement appliquer la "correspondance classique-quantique" pour obtenir une équation de Klein-Gordon dans un espace-temps statique [B15]. Il était tentant de prolonger ce travail à l'équation de Dirac, pour voir si l'équation DFW était sa seule généralisation raisonnable.

2 Principaux résultats obtenus précédemment

Equation de Dirac alternative dans un espace-temps courbe [A37], [A39]. J'ai montré qu'en partant du hamiltonien classique d'une particule relativiste dans l'espace-temps plat de Minkowski ou dans un espace-temps statique [A37], ou même dans un espace-temps lorentzien général [A39], on peut obtenir directement l'équation de Dirac par une correspondance classique-quantique. L'équation obtenue ainsi a exactement la même forme que l'équation standard (DFW) :

$$\gamma^\mu D_\mu \Psi = -iM\Psi \qquad (M \equiv mc/\hbar), \tag{1}$$

où γ^μ est le champ de matrices de Dirac (matrices complexes 4×4), mais la fonction d'ondes de Dirac Ψ se transforme comme un 4-vecteur et non comme un "bispineur". (Simultanément, on doit alors transformer le quadruplet de matrices de Dirac comme un tenseur (2 1).) De plus cette équation de Dirac dépend d'une connexion D, en fait arbitraire, sur le fibré tangent à la variété espace-temps. (D_μ est la dérivée covariante correspondante.) Pour le choix le plus naturel qui est la connexion de Levi-Civita, l'équation obéit au principe d'équivalence dans un sens plus fort que l'équation DFW [A39].

Mécanique quantique de l'équation DFW dans une métrique statique ou stationnaire [A38], [A41]. J'ai étudié, dans le cas d'une métrique statique : le hamiltonien de l'équation DFW ; le produit scalaire associé ; et la correction qu'elle apporte, pour un champ de gravitation faible, à l'équation de Schrödinger non-relativiste dans le potentiel newtonien [A38]. J'ai aussi considéré le cas d'une rotation uniforme surimposée à un champ statique faible et j'ai calculé l'effet principal de cette rotation sur les niveaux d'énergie stationnaires [A41].

Mécanique quantique de l'équation de Dirac dans un espace-temps plat [A40]. Avec F. Reifler, nous avons montré que la mécanique quantique associée à l'équation de Dirac dans un référentiel inertiel de l'espace-temps plat de Minkowski est la même, que l'on considère la fonction d'ondes de Dirac comme un bispineur, comme un 4-scalaire, ou comme un 4-vecteur. La transformation spinorielle n'est donc pas nécessaire.

Mécanique quantique de l'équation DFW et de l'équation alternative dans une métrique générale [a1]. Nous avons notamment étudié, dans une métrique complètement générale, et simultanément pour l'équation DFW et pour l'équation alternative [lorsque celle-ci a exactement la même forme (1) que l'équation DFW] : l'opérateur hamiltonien H, qui engendre l'évolution temporelle ; le produit scalaire pertinent ; l'hermiticité de H pour ce produit scalaire. Dans ce travail, et dans les suivants, nous avons attaché une attention particulière au fait que, pour l'équation de Dirac dans un espace-temps lorentzien général, les matrices de Dirac γ^μ dépendent du point X de l'espace-temps V et forment donc un "champ γ" pour lequel il existe un vaste continuum de choix admissibles. Nous avons trouvé que l'opérateur H dépend du système de coordonnées : $X \mapsto (x^\mu)$ seulement par la classe d'équivalence modulo les changements de coordonnées purement spatiaux ; que le produit scalaire pertinent pour un champ γ général s'obtient en remplaçant dans l'expression standard de ce produit scalaire la matrice de Dirac constante $\gamma^{\sharp 0}$ par la matrice hermitisante $A(X)$:

$$(\Psi \mid \Phi) \equiv \int (\Psi : \Phi)\ \mathrm{dV} = \int \Psi^\dagger\, A\gamma^0\, \Phi\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}, \qquad \mathrm{dV} \equiv \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ ; \tag{2}$$

et que *l'hermiticité de* H *pour ce produit scalaire dépend du choix admissible pour le champ* γ. (Ce résultat s'applique aussi à la situation standard où la matrice hermitisante est la matrice constante $\gamma^{\sharp 0}$.)

Non-unicité des opérateurs hamiltonien et "énergie", et du spectre énergétique [a2]. L'instabilité de l'hermiticité de H notée ci-dessus indiquait la présence d'un problème de non-unicité dans la théorie de l'équation de Dirac généralement-covariante. Nous avons alors étudié ce problème en détail. Nous avons pu, là encore, faire cette étude à la fois pour l'équation DFW et pour l'équation alternative. Dans le cas général, celle-ci contient un terme additionnel par rapport à l'équation DFW: [1]

$$\gamma^\mu D_\mu \Psi = -iM\Psi - \frac{1}{2} A^{-1}(D_\mu(A\gamma^\mu))\Psi. \tag{3}$$

On trouve que le produit scalaire pertinent est le même (2) que pour l'équation de Dirac "normale" (1). Deux champs γ^μ admissibles s'échangent par un champ de transformations de similarité, caractérisé par un champ de matrices 4×4 inversibles complexes $X \mapsto S(X)$. C'est un cas de "transformation de jauge locale". Une telle transformation agit donc sur la matrice γ^0 intervenant dans la définition (2) du produit scalaire, ainsi que sur la matrice A. Elle agit aussi sur l'expression Ψ de la fonction d'ondes. Il se trouve qu'avec toutes ces transformations le produit scalaire de deux fonctions d'ondes quelconques (2) est conservé. Autrement dit, une transformation de jauge définit une isométrie de l'espace de Hilbert de départ sur celui d'arrivée. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que les opérateurs hamiltoniens H et $\widetilde{\mathrm{H}}$, avant et après application de la transformation, soient physiquement équivalents, est que l'on ait

$$\widetilde{\mathrm{H}} = S^{-1}\,\mathrm{H}\,S. \tag{4}$$

Nous avons obtenu dans chaque cas (DFW et équation alternative) la condition caractéristique sur la transformation de jauge locale $X \mapsto S(X)$ pour qu'il en

[1] Cette équation est obtenue comme équation d'Euler-Lagrange du lagrangien. Celui-ci généralise le lagrangien standard en remplaçant $\gamma^{\sharp 0}$ par $A(X)$. Le terme $D_\mu(A\gamma^\mu)$ s'annule pour DFW.

soit ainsi. Par exemple, pour l'équation DFW, c'est simplement le fait que la transformation S soit indépendante de la coordonnée de temps $t \equiv x^0/c$:

$$\partial_0 S = 0 \qquad \text{(DFW)}. \tag{5}$$

(Ceci peut se voir rapidement en utilisant le fait que l'équation DFW est covariante par les transformations de jauge admissibles pour cette équation — qui sont les transformations différentiables $X \mapsto S(X) \in \mathsf{Spin}(1,3)$.) Or, rien dans la théorie existante n'impose que cette condition soit vérifiée. Au contraire, comme la métrique et donc le champ de tétrades dépendent généralement de t, deux choix admissibles du champ de tétrades sont reliés par une transformation de Lorentz locale L qui dépend généralement de t. Il en résulte que les champs γ^μ correspondants sont reliés par une transformation de jauge admissible S qui, elle aussi, dépend généralement de t. Ainsi, *le hamiltonien de DFW n'est pas unique* dans un système de coordonnées donné. Il en est de même pour l'équation alternative.

Toutefois, le hamiltonien n'étant pas hermitien en général [a1], on est amené à considérer sa partie hermitienne pour le produit scalaire (2) :

$$\mathrm{E} = \mathrm{H}^s \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{H} + \mathrm{H}^\ddagger). \tag{6}$$

La valeur moyenne de cet opérateur E est l'énergie E du champ définie à partir du tenseur d'énergie-impulsion *canonique* $t^\mu{}_\nu$ [a2, a7] :

$$\langle \mathrm{E} \rangle \equiv (\Psi \mid \mathrm{E}\Psi) \equiv \int \Psi^\dagger A \gamma^0 (\mathrm{E}\Psi)\, \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x} = E \equiv \int t^0{}_0 \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}, \tag{7}$$

comme l'avait montré Leclerc [Class. Quant. Grav. **23**, 4013 (2006)] dans un cas moins général. Il est donc légitime d'appeler E l'opérateur énergie. De même que pour l'opérateur hamiltonien, nous avons prouvé [a2] que *l'opérateur* E*, et même son spectre, donc le spectre énergétique d'une particule obéissant à l'équation de Dirac généralement-covariante, ne sont pas uniques.*

3 Résultats obtenus depuis 2010

3.1 Référentiels généraux et leurs variétés "espace" [a3]

Pour une particule quantique, la mécanique quantique introduit un "espace d'états", dont chacun (dans la représentation habituelle) est une fonction des coordonnées spatiales seulement : c'est sur cet espace d'états $\mathcal{H}$ qu'agissent les opérateurs de la mécanique quantique, tels que le hamiltonien H. En l'absence d'une notion intrinsèque de variété "espace", l'espace d'états $\mathcal{H}$ lui-même dépendrait du système de coordonnées, ce qui est difficilement acceptable. Comme nous l'avons montré dans l'article [a1], l'opérateur H dépend du système de coordonnées (i.e., de la carte locale), mais reste invariant quand le changement de carte est purement spatial :

$$x'^0 = x^0,\ x'^j = f^j((x^k)) \qquad (j,k=1,2,3). \tag{8}$$

Nous prouvons facilement que la relation (8) définit une relation d'équivalence entre cartes, quand on considère des cartes qui ont toutes le même domaine de définition U. Nous appelons "référentiel" F (sur le domaine ouvert U de l'espace-temps) une classe d'équivalence pour cette relation. Disons alors d'une ligne d'univers $l \subset \mathrm{U}$ qu'elle est "liée à F" si, dans une certaine carte $\chi \in \mathrm{F}$, tous les points de l ont les mêmes coordonnées spatiales x^j (ceci est alors vrai dans toute carte $\chi \in \mathrm{F}$). On peut associer à chaque référentiel un "espace" M, ensemble des lignes d'univers liées à F. Nous prouvons que M est équipé naturellement d'une structure de variété différentielle, pour laquelle, pour toute carte $\chi \in \mathrm{F}$, une application $\widetilde{\chi} : \mathrm{M} \to \mathsf{R}^3$, définie avec la partie spatiale de la carte χ de V, est une carte globale de M. Ces définitions correspondent à la notion de Cattaneo selon laquelle un "fluide de référence" est une congruence tridimensionnelle de lignes d'univers (celles des "observateurs" liés au fluide de référence). Le fluide de référence n'est autre que l'espace M. Chaque ligne d'univers l liée à F est invariante sous l'ensemble des transformations $x'^0 = g(x^0, (x^k)),\ x'^j = f^j((x^k))$, plus générales que (8). Il en résulte que l'ensemble de ces lignes d'univers, i.e. l'espace M, est lui aussi inchangé. Mais, lorsqu'on étudie un hamiltonien quantique H, il est préférable de fixer la coordonnée de temps, car H en dépend.

Ainsi, *la notion d'"espace" dépend du référentiel et ne correspond pas à une sous-variété tridimensionnelle de l'espace-temps. De plus, un système de coordonnées ou carte* (χ, U) *a un contenu physique,* puisqu'il définit un référentiel (à savoir la classe d'équivalence de χ) et l'espace associé M.

3.2 Les deux représentations de la fonction d'ondes de Dirac [a4]

Pour l'équation DFW, il est connu que la fonction d'ondes Ψ se transforme comme un scalaire lors d'un changement de carte. Pour l'équation alternative que j'avais proposée, Ψ se transforme comme un 4-vecteur. L'existence de ces deux modes de transformation nous a conduits à étudier, pour chacun d'eux, la définition géométrique des objets pertinents : la fonction d'ondes, le champ γ, la matrice hermitisante, en utilisant des éléments de la théorie des fibrés vectoriels. Supposons à l'avance qu'il existe une définition "intrinsèque" de la fonction d'ondes de Dirac, comme une section ψ d'un certain fibré vectoriel E, que nous appelons "fibré spinoriel". Supposant donc E donné, il n'est pas difficile de trouver les définitions intrinsèques du champ γ et du champ $\mathcal{A}$ de la matrice (ou métrique) hermitisante, comme étant des sections des produits tensoriels de fibrés $\mathrm{TV}\otimes\mathsf{E}\otimes\mathsf{E}^\circ$ et $(\mathsf{E}^\circ)^* \otimes \mathsf{E}^\circ$, respectivement — où TV est le fibré tangent à la variété espace-temps V, E° est le fibré vectoriel dual de E, et $(\mathsf{E}^\circ)^* = (\mathsf{E}^*)^\circ$ est le fibré vectoriel conjugué de E°. Nous avons explicitement relié ces définitions aux *expressions locales* que sont Ψ, γ^μ et A. Ceci nous a permis de relier l'écriture intrinsèque de l'équation de Dirac à son expression locale, qui n'est autre que l'écriture usuelle (1).

En ce qui concerne la définition du "fibré spinoriel" E lui-même : un résultat de Geroch, bien connu dans la littérature mathématique sur l'équation de Dirac, dit que *si* l'espace-temps est de dimension 4 et non-compact (ces deux propriétés étant conformes à l'idée que l'on se fait généralement de l'espace-temps) *et* de plus admet une "structure spinorielle" permettant une construction (très abstraite et complexe) du fibré des spineurs, *alors* il existe un champ (régulier) de tétrades orthonormales. Pour cette raison, Penrose & Rindler (Spinors and Space-time, C.U.P., 1986) considèrent qu'un espace-temps "physiquement pertinent" admet un champ de tétrades orthonormales. Nous avons prouvé que cette dernière hypothèse suffit à assurer que chacun des deux fibrés vectoriels *très simples* suivants :

- le fibré trivial $\mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$;
- le fibré tangent complexifié $\mathrm{T}_\mathsf{C}\mathrm{V}$,

est un fibré spinoriel au sens de Trautman [J. Geom. Phys. **58**, 238- (2008)] — i.e., en gros, il existe un champ global γ tel qu'une forme intrinsèque de la relation d'anticommutation usuelle soit vérifiée, ce qui permet donc de définir localement des champs γ^μ se recoupant correctement dans des ouverts qui s'intersectent.

L'existence de ces deux réalisations explicites très simples d'un "fibré spinoriel" nous permet de définir deux classes principales d'équations de Dirac : les équations QRD (pour "Quadruplet Representation of the Dirac" wave function), pour lesquelles $\mathsf{E} = \mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$, donc ψ est un champ de quadruplets de complexes (ou 4-scalaires) ; et les équations TRD (pour "Tensor Representation of the Dirac" wave function), pour lesquelles $\mathsf{E} = \mathrm{T}_\mathsf{C}\mathrm{V}$, donc ψ est un champ de 4-vecteurs complexes. *L'équation DFW est une équation QRD particulière, pour laquelle la connexion D sur $\mathsf{E} = \mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$ dépend du champ γ* (ou, de manière équivalente, du champ de tétrades) de telle façon que $D\gamma = 0$. Pour l'équation alternative que j'avais proposée antérieurement [A39], la connexion est au contraire une connexion fixée D sur $\mathsf{E} = \mathrm{T}_\mathsf{C}\mathrm{V}$, i.e. D ne change pas sous l'action d'une transformation de jauge locale. J'avais alors proposé deux choix pour la connexion sur $\mathrm{T}_\mathsf{C}\mathrm{V}$: la connexion de Levi-Civita et une connexion dépendant d'un référentiel privilégié. D'autres choix "naturels" peuvent être proposés, mais le point important est qu'*on peut écrire une équation de Dirac dès qu'on a une connexion D sur $\mathrm{T}_\mathsf{C}\mathrm{V}$, ou encore sur $\mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$*. (Toutefois, avec une connexion fixée, les transformations de jauge qui laissent l'équation de Dirac covariante ne sont pas connues à l'avance, mais dépendent du champ γ initial par l'intermédiaire d'une EDP [a1, a2].)

Il devenait important d'étudier les relations entre les différentes équations de Dirac possibles. Nous avons d'abord prouvé (**1**) que toute équation QRD est équivalente à une équation TRD, essentiellement en passant du champ de bases canonique sur $\mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$ à un champ de bases global arbitraire sur $\mathrm{T}_{\mathsf{C}}\mathrm{V}$ et en transportant tous les objets à l'aide de cette transformation. *Il n'y a donc pas de différence essentielle entre les deux représentations, 4-scalaire ou 4-vecteur, de la fonction d'ondes de Dirac.* Nous avons ensuite étudié la relation entre les équations de Dirac correspondant à deux connexions différentes D et D' sur le *même* fibré spinoriel, $\mathsf{E} = \mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$ *ou* $\mathsf{E} = \mathrm{T}_{\mathsf{C}}\mathrm{V}$. Nous avons prouvé (**2**) que pour tout choix du champ γ, l'équation de Dirac obtenue avec ce champ γ et la connexion D est équivalente (non seulement localement mais même sur un domaine assez "grand") à l'équation de Dirac obtenue avec la connexion D' et un certain autre champ $\widetilde{\gamma}$. La démonstration de ce résultat utilise un théorème de Lax sur les systèmes hyperboliques symétriques. *N'importe quel choix de la connexion contient donc toute la variété possible des équations de Dirac* sur un des deux fibrés spinoriels disponibles, et même [en vertu de (**1**)] sur les deux. En particulier, on peut proposer le choix très simple de la connexion "triviale" sur $\mathsf{E} = \mathrm{V} \times \mathsf{C}^4$: celle dont les matrices sont *nulles* dans le champ de bases canonique sur ce fibré trivial. Nous notons QRD–0 l'équation QRD obtenue ainsi.

3.3 Optique géométrique pour les fermions dans un espace-temps courbe [a5, b3]

En considérant une "limite semi-classique" appropriée, les solutions d'une équation d'ondes quantique telle que l'équation de Dirac dans un espace-temps courbe doivent permettre de retrouver des trajectoires de particules classiques dans ce même espace-temps. Il existe un certain nombre de travaux sur la question. Toutefois, le sens physique des approximations faites et des définitions permettant d'associer des trajectoires classiques à certaines solutions de l'équation de Dirac ne semble pas complètement clair. Ainsi, dans l'approximation WKB, on fait tendre $\hbar$ vers zéro. Le sens physique de cette limite n'est pas immédiat, puisque $\hbar$ est une constante (dépendant des unités). Dans le travail d'Audretsch [J. Phys. A: Math. Gen. **14**, 411 (1981)] basé sur l'approximation WKB pour une particule libre (comme la plupart de ces travaux), les trajectoires "vraiment classiques", i.e. les géodésiques, sont obtenues à l'ordre zéro en $\hbar$. A cet ordre, les matrices Γ_μ de la connexion de spin n'interviennent pas, comme si à cet ordre d'approximation l'espace-temps était assimilable à un espace-temps plat, alors que la connexion de Levi-Civita intervient bien sûr dans l'équation des géodésiques.

Nous avons appliqué [a5] à l'équation de Dirac, dans un espace-temps courbe et en présence d'un champ électromagnétique général, une approximation d'optique géométrique proposée dans un contexte différent par Whitham. Cette approximation consiste simplement à négliger dans le lagrangien la variation de l'amplitude χ de la fonction d'ondes $\Psi = \chi e^{i\theta}$ devant la variation de la phase (réelle) θ, i.e. à admettre que

$$\partial_\mu \chi \ll (\partial_\mu \theta)\chi. \tag{9}$$

Avant de la mettre en œuvre, nous démontrons que toute équation de Dirac générale (3), basée sur un champ γ et une connexion D quelconque, est équivalente localement à une équation de Dirac *normale* (1) pour la connexion triviale QRD–0, i.e. à une équation de la forme

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = -\frac{imc}{\hbar}\Psi. \tag{10}$$

Ceci est obtenu notamment en annulant au moyen d'une transformation de jauge la matrice $\Gamma \equiv \gamma^\mu \Gamma_\mu$, qui contient tout l'effet des matrices Γ_μ de la connexion (générale) D sur l'équation de Dirac. Nous ne faisons donc aucune approximation en écrivant le lagrangien avec $\Gamma = 0$. L'utilisation de l'approximation de Whitham (9) nous donne alors un nouveau lagrangien. Nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange correspondantes. Après un changement de variables suggéré par les *relations de Broglie,* nous avons un champ de 4-vitesse u^μ et une densité de probabilité J. Les trajectoires du champ u^μ vérifient exactement les équations du mouvement d'une particule classique dans le champ électromagnétique. Le courant $J\,u^\mu$ vérifie exactement l'équation de conservation d'un courant [a5].

Inversement, on peut partir du hamiltonien d'une particule classique et, appliquant la correspondance classique-quantique, obtenir l'équation de Dirac : je l'avais fait pour une particule soumise au champ électromagnétique dans l'espace-temps de Minkowski, *ou* pour une particule libre dans un espace-temps courbe. Nous avons généralisé ces résultats à une particule soumise au champ électromagnétique *et* dans un espace-temps courbe [b3]. Nous avons d'abord défini un hamiltonien classique pour cette situation, en utilisant les résultats d'O. D. Johns (Oxford Un. Press, 2005) sur les lagrangiens et hamiltoniens "traditionnels" (3-D) et "étendus" (4-D). Nous définissons aussi à partir du lagrangien "étendu" un 4-covecteur "impulsion canonique" P_μ. La correspondance classique-quantique consiste dans un premier temps à *postuler* les relations de Broglie sous la forme

$$P_\mu = \hbar K_\mu, \tag{11}$$

où $K_\mu \equiv \partial_\mu \theta$ est le covecteur d'ondes. On obtient alors [b3] l'équation de Dirac par le même procédé que précédemment [A37], [A39].

Revenant à l'approximation de l'optique géométrique pour l'équation de Dirac, on *déduit* cette fois [b3] les relations de Broglie (11) des relations exprimant le changement de variables utilisé pour trouver des trajectoires classiques.

3.4 Une solution "conservatrice" du problème de non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie [a6]

La non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie, prouvée précédemment [a2], signifie manifestement que, dans les équations de Dirac généralement-covariantes, le choix de "jauge" (en l'occurrence, le choix du champ de matrices de Dirac

γ^μ) est trop large pour qu'on ait l'unicité de ces opérateurs (et celle du spectre énergétique). Pour obtenir cette unicité, il semble donc qu'il faille restreindre les possibilités de choix du champ γ^μ (ou, de manière équivalente pour DFW, du champ de tétrades), d'une façon cohérente et suffisante. Ce n'est pas une tâche facile. (En témoignent les tentatives successives d'autres auteurs, dont j'ai dû montrer dans ce travail qu'elles ne résolvent pas le problème.)

Une première méthode de résolution de ce problème peut être proposée de la façon suivante. Le hamiltonien et l'opérateur énergie sont définis dans un référentiel donné [a1] — cette dernière notion étant définie comme une classe d'équivalence de cartes [a3]. Je montre que la donnée d'un référentiel F, en ce sens précis, fixe un champ de 4-vitesse unique v_F, et fixe aussi un champ unique de vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}_\mathrm{F}$, à peu près comme l'ont défini Weyssenhoff et Cattaneo. Il est naturel d'imposer au champ de tétrades (u_α) $(\alpha = 0, ..., 3)$ la condition que le vecteur du genre temps de la tétrade soit la 4-vitesse du référentiel F : $u_0 = v_\mathrm{F}$. Je définis géométriquement le champ de vitesse de rotation Ξ de la triade spatiale (u_p) comme un champ tensoriel sur la variété "espace" M munie d'une métrique riemannienne qui dépend du temps. Je prouve que tous les champs de tétrades (u_α) qui ont le même vecteur du genre temps u_0, et pour lesquels le champ Ξ est le même, donnent lieu à des opérateurs hamiltonien et énergie équivalents. Deux façons naturelles de fixer le champ Ξ sont : i) $\Xi = \mathbf{\Omega}_\mathrm{F}$, et ii) $\Xi = \mathbf{0}$. Chacun de ces deux choix fournit donc une solution au problème de non-unicité. Je prouve que ces deux solutions ne sont pas équivalentes. Il est plausible que la première, mais pas la deuxième, conduise à un "couplage spin-rotation" tel que l'a prédit Mashhoon. De plus, ces deux solutions ne sont pas aisées à mettre en œuvre. Enfin, au moins à cause de la condition $u_0 = v_\mathrm{F}$, elles ne sont valables que pour un référentiel F donné.

3.5 Une solution simple du problème de non-unicité des opérateurs hamiltonien et énergie [a7]

L'équation de Dirac originelle, celle proposée par Dirac, n'est valable qu'en relativité restreinte : en coordonnées cartésiennes dans l'espace-temps de Minkowski. Dans cette équation, les matrices de Dirac γ^μ sont constantes. Dans ce cas, l'opérateur hamiltonien H est hermitien et donc coïncide avec l'opérateur énergie E, éq. (6). Deux choix possibles pour les matrices γ^μ s'échangent par une transformation de jauge (une transformation de similarité des γ^μ) *constante*. L'opérateur H est invariant sous ces transformation de jauge "globales" [A40]. De même, pour l'équation DFW, une transformation de jauge constante ($\partial_\mu S = 0$) vérifie la condition (5) d'invariance du hamiltonien dans tout système de coordonnées et conduit donc à un opérateur $\widetilde{\mathrm{H}}$ équivalent à celui de départ H. Ceci est vrai aussi pour l'opérateur E. Cette invariance de H et E sous les transformations de jauge constantes est vraie aussi pour l'équation QRD–0, mais elle ne l'est plus si l'on fait un autre choix de connexion. Est-il possible de restreindre le choix du champ γ^μ à une classe telle que deux choix quelconques dans celle-ci s'échangent par une similarité constante S? En définissant le champ γ^μ par un champ de tétrades orthonormales, ceci équivaut à demander que deux champs de tétrades possibles s'échangent par une transformation de Lorentz constante.

Pour éclairer cette question, j'ai étudié un procédé général pour définir un champ de tétrades orthonormales dans une carte (système de coordonnées) donnée, dans laquelle la métrique est connue par sa matrice 4×4, $G \equiv (g_{\mu\nu})$. Ce procédé consiste, utilisant une suggestion de F. Reifler, à calculer la décomposition de Cholesky (généralisée) de G, qui est unique. J'en déduis une tétrade unique, définie par sa matrice dans la carte considérée. (Pour une métrique diagonale quelconque, ce procédé se confond avec le choix classique de la "tétrade diagonale".) Je montre néanmoins qu'en général ce procédé laisse entier le problème de non-unicité. La raison en est que deux choix possibles de la carte à l'intérieur d'un même référentiel (ce dernier étant donné physiquement, et non la carte) conduisent par ce procédé à deux tétrades différentes qui s'échangent par une transformation de Lorentz dépendant, en général, du temps $t = x^0$.

Cependant, on voit aussi que la transformation de Lorentz pourrait ne pas dépendre du temps, à la condition que la métrique ait (dans une certaine carte) la forme "diagonale spatialement isotrope" suivante :

$$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(f, -h, -h, -h), \qquad f > 0,\ h > 0. \tag{12}$$

Je prouve ensuite que s'il en est ainsi, alors, pour tout couple de choix possibles de la carte dans laquelle la métrique a la forme (12), les deux "tétrades diagonales" obtenues sont reliées par une transformation de Lorentz constante. (La démonstration utilise un résultat de la théorie mathématique des milieux continus en grandes déformations.) Il en résulte que ce procédé conduit, dans *tout* système de coordonnées, et par suite dans tout référentiel, à un opérateur H unique et un opérateur énergie unique. Le problème de non-unicité est donc résolu indépendamment du référentiel, et d'une façon praticable. Je montre aussi que la forme (12) est suffisamment générale pour les tests expérimentaux prévisibles. Il se trouve que (12) est précisément la forme postulée de la métrique dans le référentiel privilégié, dans la théorie scalaire de la gravitation que j'ai proposée antérieurement [A35]. J'y arrive ici par une voie entièrement différente.

Dans ce même travail [a7], j'indique pourquoi il ne me semble guère probable qu'il existe une telle résolution du problème de non-unicité indépendamment du référentiel pour une forme plus générale de la métrique. Je montre aussi que le postulat d'existence d'une carte dans laquelle la métrique a une forme imposée [quelle qu'elle soit, donc en particulier la forme (12)] est invariant par difféomorphisme (isométrique). Enfin, je justifie ma restriction à la "première quantification" : i) aux énergies faibles (qui sont pertinentes pour les expériences de mécanique quantique dans le champ de gravitation et aussi pour la théorie des atomes du type hydrogène), on peut ignorer les états d'énergie négative, donc l'équation de Dirac fait sens. ii) L'équation (7) indique que c'est le tenseur énergie-impulsion canonique $t^\mu{}_\nu$ qui est pertinent, et donc que le tenseur énergie-impulsion "quantique" (l'opérateur correspondant à $t^\mu{}_\nu$ en théorie du champ quantique) devrait être obtenu en "quantifiant" $t^\mu{}_\nu$. Mais (7) montre aussi que la non-unicité de l'opérateur énergie E due à l'influence du choix de jauge se propage à $t^\mu{}_\nu$. La version quantique de ce dernier devrait donc elle aussi être non-unique. iii) Indépendamment de la question du choix de jauge, les développements rigoureux en théorie quantique du champ de Dirac dans un espace-temps courbe ne semblent pas encore avoir abouti à une théorie permettant de faire des prédictions univoques des effets de mécanique quantique dans le champ de gravitation.

4 Publications depuis 2010

4.1 Revues avec comité de lecture

[a1] M.A., F. Reifler, "Basic quantum mechanics for three Dirac equations in a curved spacetime", *Braz. J. Phys.* **40**, 242–255 (2010). [arXiv:0807.0570 (gr-qc)]

[a2] M.A., F. Reifler, "A non-uniqueness problem of the Dirac theory in a curved spacetime", *Ann. Phys. (Berlin)* **523**, 531–551 (2011). [arXiv:0905.3686 (gr-qc)]

[a3] M.A., F. Reifler, "General reference frames and their associated space manifolds", *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **8**, 155–165 (2011). [arXiv:1003.3521 (gr-qc)]

[a4] M.A., F. Reifler, "Four-vector vs. four-scalar representation of the Dirac wave function", *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **9**, N° 4 (juin), 1250026 (2012) (23 pages). [arXiv:1012.2327 (gr-qc)]

[a5] M.A., F. Reifler, "Equivalent forms of Dirac equations in curved spacetimes and generalized de Broglie relations", soumis pour publication. [arXiv:1103.3201 (gr-qc)].

[a6] M.A., "A solution of the non-uniqueness problem of the Dirac Hamiltonian and energy operators", *Ann. Phys. (Berlin)* **523**, 1008–1028 (2011). [Preprint avant expertise : arXiv:1107.4556 (gr-qc)]

[a7] M.A., "A simpler solution of the non-uniqueness problem of the covariant Dirac theory", soumis pour publication. [arXiv:1205.3386 (math-ph)]

4.2 Actes de colloques avec comité de lecture

[b1] M.A., F. Reifler, "Non-uniqueness of the Dirac theory in a curved spacetime", First Mediterranean Conference on Classical and Quantum Gravity (Kolymbari, Grèce, 14-18 sept. 2009), *J. Phys. Conf. Ser.* **222**, 012042 (2010). [arXiv:1001.0460 (gr-qc)]

[b2] M.A., F. Reifler, "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond (Castiglioncello, Italie, 13-17 sept. 2010), *J. Phys. Conf. Ser.* **306**, 012061 (2011). [arXiv:1011.6286 (gr-qc)]

[b3] M.A., F. Reifler, "Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* **24**, 77–88 (2011). [arXiv:1109.6649 (gr-qc)]

[b4] M.A., "The non-uniqueness problem of the Dirac theory: "conservative" vs. "radical" solutions", *Plenary talk,* 14th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (Varna, Bulgarie, 8-13 juin 2012). Texte en préparation. **Transparents**

4.3 Séminaires, workshops

[s1] "Equations de Dirac dans un espace-temps courbe et Mécanique quantique associée", Séminaire de Physique Mathématique de l'Institut Fourier, 24 janvier 2011 (*sur invitation*). **Transparents**