

# Sur la validité de la mécanique linéaire élastique de la rupture en mode I

Laurent Daudeville, Laboratoire Sols, Solides, Structures, Grenoble

## Résumé

Dans un premier temps, est montrée une campagne expérimentale d'essais de flexion trois points menée sur des éprouvettes entaillées en sapin et en épicéa. L'énergie de fissuration en mode I ( $G_f$ ) est déterminée. Les influences de l'orientation des directions locales d'orthotropie par rapport à la normale à la fissure et de la taille de l'échantillon ont été étudiées. L'étude de l'effet d'échelle permet de montrer la limite de validité de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MLER) pour l'analyse de ces essais.

Dans un second temps, quelques essais sont simulés avec une approche fondée sur la MLER et sur une approche non linéaire fondée sur la Mécanique de l'Endommagement (ME). Ces simulations confirment les conclusions de l'étude expérimentale et montrent que  $G_f$  peut être considéré comme un paramètre intrinsèque au matériau pour l'analyse de la fissuration en mode I de structures en bois.

**Mots clefs:** Mécanique de la Rupture – Mécanique de l'endommagement - Energie de fissuration

## Introduction

### Présentation du problème

La MLER est une théorie usuelle pour l'analyse de la rupture des métaux ou des matériaux fragiles tels que le verre, les céramiques... Tous les phénomènes d'endommagement sont supposés concentrés à la pointe de fissure. La Mécanique Non Linéaire de Rupture (MNLR) suppose l'existence d'une "Fracture Process Zone" (FPZ) (zone plane siège des phénomènes de dégradation). Cette technique a été utilisée pour le béton (Hillerborg et al. 1976, Bazant et Kazemi 1990, Jenq et Shah 1985, Nallathambi et Karihaloo 1986) et pour le bois (Gustafsson 1988, Boström 1988).

La Mécanique de l'Endommagement et la MNLR ont été développées pour traiter le problème de la rupture au sein de matériaux ayant un comportement adoucissant, c'est-à-dire pour les matériaux non fragiles. La rupture est alors précédée de phénomènes de localisation.

Une limitation de la MLER est la nécessité de supposer l'existence d'une fissure. Les concepts de la MNLR et de la ME peuvent être utilisés pour traiter le problème de l'amorçage d'une fissure.

La MNLR a été essentiellement appliquée au problème de la rupture du béton. Dans un tel matériau isotrope fragile, le mode I de rupture est dominant. En raison du comportement orthotrope du bois, la fissure peut se propager le long du fil dans des conditions de mode mixte. Le trajet de fissuration est généralement connu pour un tel matériau très orthotrope (parallèle au fil). Dans un schéma Élément Fini (EF), des éléments d'interface peuvent être utilisés pour l'analyse de la fissuration en mode mixte ou pur le long d'un chemin prévu. De telles techniques ont déjà été utilisées pour différentes applications du génie civil (Ngo et Scordelis 1967, Hohberg et Bachmann 1988, Gens et al. 1988, Garcia-Alvarez et al. 1994).

La FPZ a une dimension qui dépend de la taille de la micro hétérogénéité du bois. La FPZ concerne une région relativement importante pour de petits spécimens et peut être négligée pour de grands spécimens. L'effet d'échelle peut être étudié en comparant des réponses de structures géométriquement semblables et de différentes tailles. Dans l'analyse de ce phénomène, on peut séparer "l'effet de volume" lié à l'existence de défauts au sein du matériau et "l'effet de structure" qui est l'effet direct de la taille sur la réponse des structures pré-fissurées. Des discussions sur l'effet d'échelle ont été menées par Bazant (1984) pour le béton ou par ), Larsen et Gustafsson (1990), Aicher (1992, 1993) et Morel et Valentin (1996, 1998) pour le bois.

L'influence de la FPZ produit un effet d'échelle tel que la résistance nominale ne varie pas selon l'inverse de la racine carrée de la taille ( $h^{-0.5}$ ) comme prévu par la MLER (Bazant 1984). Les concepts de la MLER sont seulement valables pour de grands spécimens, c'est-à-dire lorsque la taille de la FPZ est négligeable. Les approches non linéaires permettent de prendre en compte l'influence de la FPZ pour de petits spécimens.

### Objet de l'étude

Une approche simplifiée fondée sur la Mécanique de l'Endommagement pour l'analyse de la fissuration du bois est utilisée dans cette étude. Dans l'approche décrite, il est supposé que tous les phénomènes de dégradation se produisent sur une surface (ou une ligne dans un problème 2D) appelée interface. Le modèle d'interface associe les contraintes normales aux sauts de déplacements relatifs dans la zone

localisée. L'endommagement est décrit au moyen des variations relatives de raideur qui peuvent avoir une influence significative dans le cas d'un chargement de fatigue. Dans cette étude, le problème de structures déjà fissurées est traité.

L'approche proposée et la MLER ont le même champ d'application. Un lien entre les paramètres du modèle et ceux de la MLER est donné en terme d'énergie de fissuration.

Un programme expérimental a été mené pour l'analyse de la fissuration en mode I d'échantillons en épicéa et en sapin. Les influences de l'orientation des directions locales d'orthotropie par rapport à la normale à la fissure et de la taille de l'échantillon ont été étudiées. Les résultats importants sont d'une part que l'énergie de fissuration ( $G_f$ ) ne dépend pas de la taille des échantillons pour les dimensions considérées et d'autre part que les concepts de la MLER sont incorrects pour les petites poutres.

Afin de vérifier ces observations expérimentales, quelques essais ont été simulés, d'abord au moyen de la MLER. La propagation de fissure est simulée par EF. Le taux de restitution d'énergie critique est identifié avec la force maximale (début de la propagation de la fissure initiale).

Ensuite, les essais ont été analysés par la méthode EF et la ME. Le seul paramètre identifié est l'énergie de rupture par unité de surface fissurée ( $Y_f$ ) qui est un paramètre du modèle et qui dépend de l'orientation de la fissure.  $Y_f$  a été identifié avec la force maximale.

Cette étude permet de disposer d'une base de données concernant la ténacité de l'épicéa et du sapin parallèlement aux fibres. Elle permet également de donner des éléments de réponse sur les limites de validité des approches fondées sur la MLER.

## Expérimentation

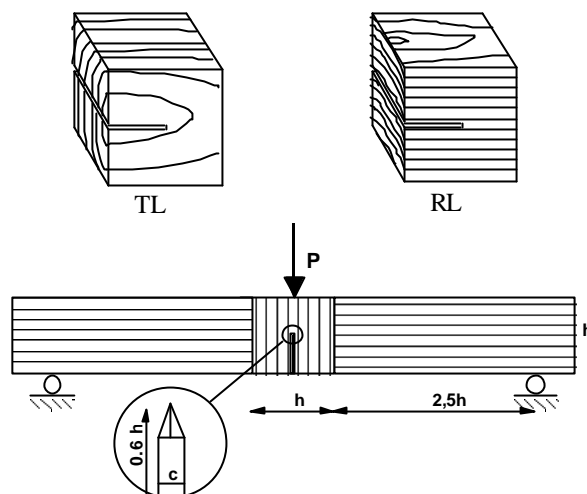
### Présentation

Un programme expérimental a été mené à Paris (CTBA) et Tokyo (Université de Tokyo) pour la détermination de l'énergie de fissuration en mode I de spécimens en épicéa et sapin au moyen d'un essai de Flexion Trois Points (FTP) initialement proposé par la RILEM pour le béton et modifié par le CIB-W18 (Larsen et Gustafsson 1989). Une condition essentielle est de s'assurer de la stabilité de la réponse force déflexion lors de la propagation de la fissure depuis une longueur initiale jusqu'à la séparation complète.

Les échantillons ont des orientations de fissure radiale et tangentielle notées RL et TL (Figure 1). La normale au plan d'une fissure d'orientation tangentielle (TL) (respectivement RL) est parallèle (resp. perpendiculaire) aux cernes du bois. Les deux orientations de fissure ont été étudiées avec une taille de poutre fixée ( $h = 45$  mm). L'étude de l'influence de la taille ( $h = 45, 67, 100$  mm) sur la résistance nominale pour une orientation de fissure donnée (TL)

et une profondeur de poutre constante ( $b = 45$  mm) a été menée.

**Figure 1 - Essai de flexion trois points**  
*Three point bending test*



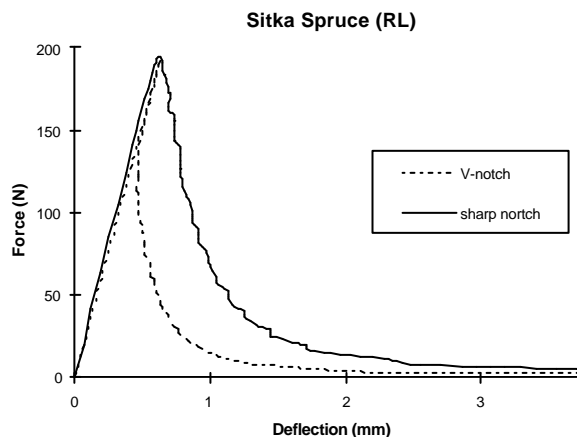
### Calculs préliminaires

La figure 2 montre l'influence de la forme d'entaille sur la stabilité de la réponse obtenue dans le cadre de la MLER (calculs présentés après). Une entaille fine ( $c = 1$  mm) finie avec une lame de rasoir (Figure 1) est meilleure vis-à-vis de la stabilité de la réponse qu'une entaille en V ( $c = 3$  mm) qui présente un "snap-back" dans la courbe force déflexion.

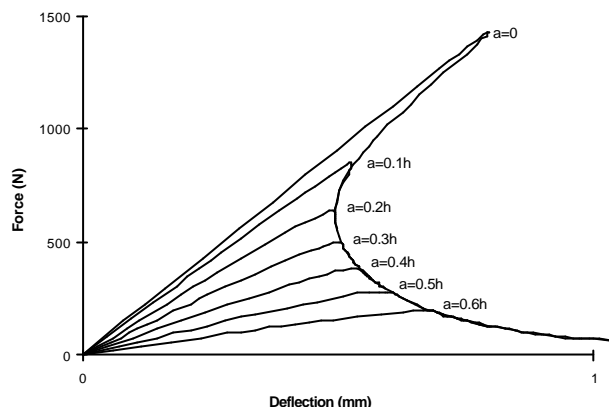
La figure 3 montre les réponses simulées, dans le cadre de la ME (calculs présentés après), de poutres avec des longueurs d'entaille initiale différentes. Une longueur d'entaille initiale égale à 60% de la hauteur de la poutre ( $h$ ) permet d'assurer une réponse stable. Cette longueur de fissure initiale a également été utilisée par Aicher (1992).

**Figure 2 - Influence théorique de la forme d'entaille sur la stabilité de la réponse charge-déflexion selon la MLER**

*Theoretical influence of the notch shape on the stability of the load-deflection response by means of LEFM*



**Figure 3 - Influence de la longueur d'entaille initiale selon la ME**  
*Theoretical influence of the initial crack length computed by means of DM*



**Résultats**

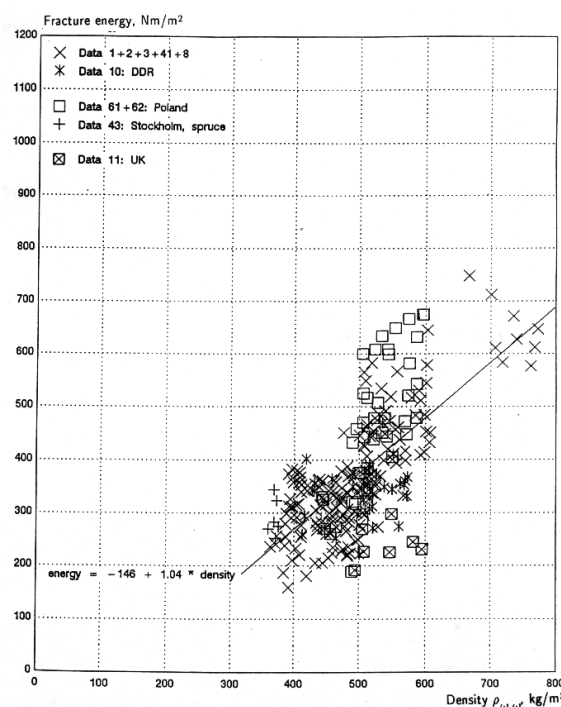
Les tests ont été effectués à déplacement imposé avec une vitesse de déplacement de 0,5 mm/min pour les petits échantillons (h = 45 mm). Cette vitesse a été choisie afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux de Larsen et Gustafsson (1990) qui ont utilisé une vitesse de déformation proche mais avec des tailles (h) différentes. Les spécimens ont été fabriqués et conditionnés à 20±2°C et 65±5% HR. La masse volumique moyenne est 440 kg/m<sup>3</sup>. Le tableau 1 donne les énergies de fissuration des petits spécimens (h = 45 mm) en fonction de l'orientation du plan de fissuration. Les tests 1,2 ont été effectués à Paris (collaboration LMT-CTBA), et les tests 3,4 ont été effectués à l'Université de Tokyo. Les tests 1,2,3 concernent des essences de bois français. Les tests 4 concernent du bois nord-américain.

**Tableau 1 - Energie de fissuration de l'épicéa et du sapin pour de petits spécimens (h = 45 mm)**  
*Fracture energy of spruce and fir small specimens (h = 45 mm)*

| Essence                                      | Orien-tation | Moy N/m | Min N/m | Max N/m | Nb (cv %) |
|--|--------------|---------|---------|---------|-----------|
| Epicéa <sup>1</sup> (Picea excelsa)          | RL           | 220     | 159     | 345     | 32 (19)   |
|  | TL           | 160     | 100     | 247     | 10 (29)   |
| Sapin <sup>2</sup> (Abies pectinata)         | RL           | 210     | 126     | 367     | 35 (26)   |
|  | TL           | 157     | 97      | 236     | 5 (37)    |
| Epicéa et Sapin <sup>3</sup> (non distingué) | RL           | 251     | 184     | 371     | 5 (31)    |
|  | TL           | 157     | 133     | 214     | 10 (15)   |
| Epicéa Sitka <sup>4</sup> (Picea sitchensis) | RL           | 220     | 157     | 248     | 5 (16)    |
|  | TL           | 164     | 136     | 196     | 5 (16)    |
| Bois blanc                                   |              | 201     | 97      | 367     | 107       |

Le résultat obtenu pour l'épicéa et pour l'orientation RL est très proche de celui trouvé par Aicher (1992) pour une dimension d'éprouvette presque semblable (h = 44 mm). Par contre la moyenne des résultats (bois blanc) est plus basse que celle obtenue par Larsen et Gustafsson (1990) (Figure 4). Notons que le nombre de tests des auteurs précédents est faible pour la masse volumique et la profondeur de poutre (b) considérés.

**Figure 4 - Energie de fissuration de l'épicéa en fonction de la masse volumique (Larsen et Gustafsson 1990)**  
*Fracture energy vs. density*



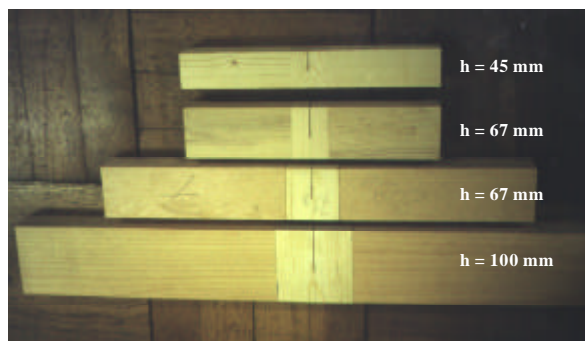
**Effet d'échelle**

L'influence de la taille des échantillons a été examinée à Tokyo pour l'orientation tangentielle (TL) seulement. Dans le but d'étudier l'effet de structure uniquement, des échantillons de hauteur (h) et de longueur (6h) différentes ont été testés (h = 45, 67, 100 mm) mais la profondeur (b = 45 mm) est conservée constante (Figure 5). La famille de poutres (h = 67 mm) avec une longueur (6x45 mm) n'a pas été testée pour étudier l'effet d'échelle mais pour vérifier l'hypothèse consistant à considérer que l'énergie de fissuration est une grandeur intrinsèque au matériau. La vitesse de déplacement est choisie proportionnelle à h afin d'avoir une vitesse de déformation constante. Dans de telles conditions, l'effet d'échelle semble insignifiant sur l'énergie de fissuration (Tableau 2). La série de poutres (h = 67 mm ; l = 6x45 mm) donne une énergie de fissuration semblable (151 Nm/m<sup>2</sup>) à celles données dans le tableau 2. Il faut néanmoins nuancer ces propos dans la mesure où le

rapport entre la plus grande et la plus petite taille d'éprouvette est faible (2,2). C'est le choix d'une profondeur (b) constante qui n'a pas permis de tester des éprouvettes plus grandes car la résistance d'une grande éprouvette rapportée à son poids devient très faible et rend sa manipulation difficile.

Larsen et Gustafsson (1990) ont remarqué un léger effet d'échelle. A la différence des essais présentés, ces auteurs ont augmenté la profondeur des spécimens proportionnellement à leur hauteur (h = 40-160 mm). L'effet d'échelle constaté par ces auteurs peut être dû à l'augmentation de variation d'orientation des directions principales par rapport au plan de propagation de fissure lorsque la profondeur augmente.

**Figure 5 - Echantillons de bois de tailles différentes, orientation TL**  
Different size specimens, TL orientation

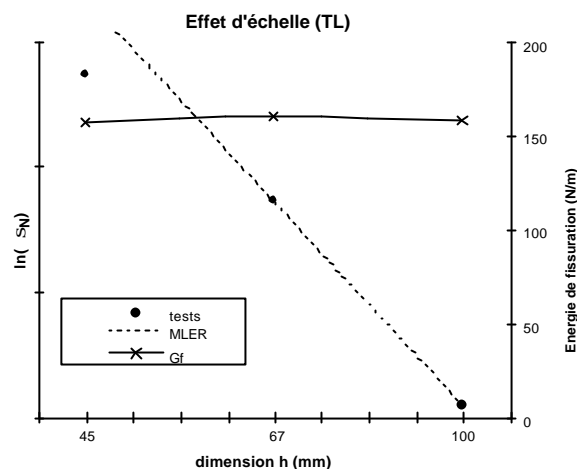


**Tableau 2 - Energie de fissuration en fonction de la hauteur (h) pour une orientation tangentielle**  
Fracture energy vs. specimen height, TL orientation

| h (mm)         | Orien-tation | Moy N/m | Min N/m | Max N/m | Nb (cv %) |
|----------------|--------------|---------|---------|---------|-----------|
| 45             | TL           | 157     | 133     | 214     | 10(15)    |
| 67             | TL           | 160     | 115     | 209     | 9 (19)    |
| 100            | TL           | 159     | 112     | 279     | 8 (34)    |
| Tous résultats | TL           | 161     | 112     | 279     | 28        |

Traçons, dans un diagramme log-log, la droite décrivant l'effet d'échelle de la MLER sur la résistance nominale  $\sigma_N = [(P+5mg/12)/bh]$  passant par le point correspondant à h = 100 mm (pente -1/2). La figure 6 montre que la prédiction de la résistance nominale par la MLER est correcte pour les deux familles de spécimens les plus grands mais pas pour les plus petits échantillons (h = 45 mm). Ce dernier résultat s'explique par l'influence de la FPZ sur le processus global de fissuration. Aicher (1993) a obtenu les mêmes conclusions pour des hauteurs de spécimens (h) variant de 10 à 320 mm avec une orientation radiale (RL) et une profondeur de poutre constante (b = 44 mm).

**Figure 6 - Effet d'échelle sur la résistance nominale ( $S_N$ ) et l'énergie de fissuration ( $G_f$ )**  
Size effect on the nominal strength ( $S_N$ ) and the fracture energy ( $G_f$ )

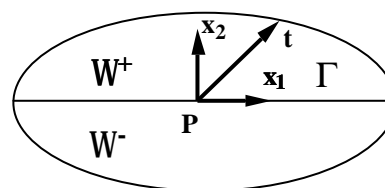


### Modélisation de la fissuration par la Mécanique de l'Endommagement

Les phénomènes d'endommagement en mode mixte ou pur sont supposés concentrés sur une interface d'épaisseur nulle  $\Gamma$  reliant les deux parties  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  d'un milieu  $\Omega$  (Figure 7).

- Les caractéristiques principales du modèle sont :
- problème plan  $x_1x_2$ ,  $x_1$  est la direction des fibres,
  - les dommages sont décrits par les variations relatives de rigidité ( $d_1$ ) et ( $d_2$ ),
  - il n'y a pas d'endommagement en compression (effet unilatéral selon  $x_2$ ),
  - il n'y a pas de déplacement relatif irréversible,
  - pendant la phase élastique du processus de chargement, aucun déplacement relatif significatif ne se produit.

**Figure 7 - Directions locales de l'interface**  
Local directions of joint element

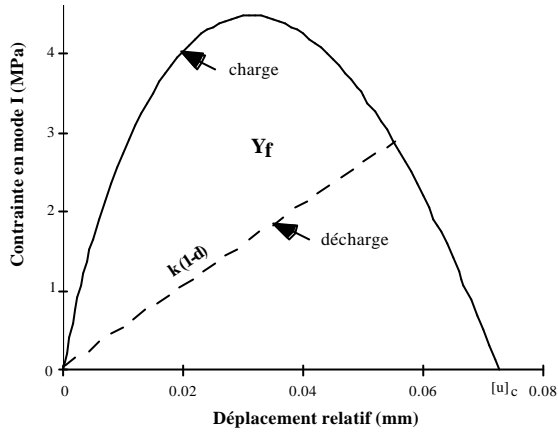


Le vecteur saut de déplacement  $[u]$  au point P est :  
 $[u] = u_+ - u_- = [u_1] x_1 + [u_2] x_2$  avec  $[u_2] > 0$

Le vecteur contrainte est :

$t = \sigma_{12} x_1 + \sigma_{22} x_2 = k_1 (1-d_1) [u_1] x_1 + k_2 (1-d_2) [u_2] x_2$   
Les raideurs  $k_1$  (mode II) et  $k_2$  (mode I) doivent être élevées pour assurer la continuité du déplacement quand il n'y a pas d'endommagement. Une courbe typique contrainte-déplacement en mode I est donnée (Figure 8).

**Figure 8 - Courbe contrainte normale-déplacement relatif en mode I**  
*Constitutive behavior in mode I*



Les variables  $Y_{di}$  ( $i = 1,2$ ), conjuguées aux  $d_i$ , sont semblables aux taux de restitution d'énergie de la MLER :

$$Y_{d1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{12}^2}{k_1(1-d_1)^2} \quad \text{et} \quad Y_{d2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{22}^2}{k_2(1-d_2)^2} \quad (1)$$

Un choix particulier de loi d'évolution de l'endommagement est présenté (Allix et al. 1994),  $\gamma$  est un facteur de couplage entre les modes I et II :

$$\underline{Y} = \sup \frac{n}{n+1} (Y_{d2} + \gamma Y_{d1}) \quad (2)$$

$$d = d_1 = d_2 = w(\underline{Y}) = \left( \frac{\underline{Y}}{Y_f} \right)^n \quad \text{et} \quad d = 1 \quad (3)$$

Lorsque  $d=1$ , l'interface est considérée fissurée. La zone telle que  $0 < d < 1$  correspond à la FPZ.  $Y_f$  et  $n$  sont des paramètres caractéristiques de la loi d'évolution de l'endommagement et supposés intrinsèques au matériau.  $Y_f$  est une énergie critique. Ces paramètres peuvent être identifiés par l'analyse de tests de fissuration.

### Un lien avec la Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture (Allix et al. 1994)

Les essais de fissuration (Valentin et al. 1991) permettent d'obtenir les trois taux de restitution d'énergie critique  $G_c$ ,  $G_{Ic}$  et  $G_{IIc}$  relativement aux modes I, II et III définis dans le cadre de la MLER. Leurs valeurs sont différentes en raison du caractère orthotrope du comportement.

Les phénomènes d'endommagement sont supposés concentrés sur l'interface  $\Gamma$ . Considérons un état permanent de propagation de fissure, c'est-à-dire que la FPZ se translate pendant la propagation et a une taille constante.

Cette distinction entre l'amorçage et l'état permanent de propagation de fissure est classique pour les matériaux non fragiles qui présentent un effet de courbe R. Plutôt que le taux de restitution d'énergie

$G_c(a_0, P_u)$ , défini à l'amorçage et pour la charge maximale, le taux de restitution d'énergie critique défini pour un état permanent de propagation est considéré. Il est difficile d'obtenir expérimentalement  $G_c(a, P)$  en raison de la difficulté de mesure de la longueur de fissure  $a$  lorsque la charge  $P$  évolue.

Définissons l'extrémité de fissure par  $d = 1$ . Une équivalence des énergies dispersées par unité de surface fissurée donne :

$$G_c = G_I + G_{II} = \int_{d=0}^{d=1} Y_{d2} \delta d + \int_{d=0}^{d=1} Y_{d1} \delta d \quad (4)$$

Un mode mixte de fissuration est considéré.  $G_c$  n'est pas une grandeur intrinsèque, les ténacités  $G_{Ic}$  et  $G_{IIc}$  sont introduites. Le rapport  $c$  est défini :

$$c = \frac{Y_{d1}}{Y_{d2}} = \frac{G_{II}}{G_I} \quad \text{alors} \quad G_c = \int_{d=0}^{d=1} (1+c) Y_{d2} \delta d \quad (5)$$

Soit avec (2) et (3), et en modes purs de fissuration :

$$G_c = \frac{(1+c) Y_f}{1+\gamma c} \quad ; \quad G_{Ic} = Y_f \quad ; \quad G_{IIc} = \frac{Y_f}{\gamma} = \frac{G_{Ic}}{\gamma} \quad (6)$$

La relation précédente permet d'identifier  $Y_f$  et  $\gamma$  à partir des quantités issues d'essais classiques de fissuration. (5) et (6) permettent d'écrire le critère de propagation en mode mixte :

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = 1 \quad (7)$$

Ce type de critère est classique pour les matériaux orthotropes comme le bois. Il est généralement écrit en termes de facteurs d'intensité de contraintes (Hunter et Croager 1982, Lum and Foschi 1988, Murphy 1986, Patton-Mallory et Cramer 1987, Triboulot et al. 1984, Valentin et al. 1991). Le premier terme de l'équation (7) peut être écrit avec un exposant (généralement égal à 0,5) comme le proposent (Wu 1967, Mall et al. 1983) en modifiant la loi d'évolution de l'endommagement (2) (3).

La donnée du taux de restitution d'énergie critique n'est pas suffisante pour l'identification du modèle, car elle ne donne une information que sur l'aire de la courbe contrainte-déplacement relatif (Figure 8) mais pas sur sa forme.

### Energie de fissuration

Un autre paramètre pouvant caractériser la fissuration est l'énergie de fissuration ( $G_f$ ) par exemple en mode I, obtenue expérimentalement en calculant l'énergie dissipée pour fissurer totalement un spécimen.  $G_f$  est obtenu en considérant les travaux dus à la charge et au poids (Larsen et Gustafsson 1989) :

$$G_f = \frac{W + mgu_0}{h_0 b} \quad (8)$$

W est l'aire sous la courbe charge-déplacement en considérant une "force équivalente"  $F_{eq} = F - mg/2$  pour la prise en compte du travail du poids (avec une cinématique de deux corps rigides),  $u_0$  est la déflexion pour  $F_{eq} = 0$ , m est la masse de la poutre, g est l'accélération de la pesanteur, b est la profondeur de la poutre et  $h_0$  est la longueur du ligament ( $h_0 = 0,4h$ ) (Figure 1).

Dans le cas d'un matériau parfaitement fragile, il n'y a pas de FPZ, les phases de fissuration transitoire (amorçage et fin de fissuration) et permanente sont similaires alors :

$$G_f = G_c \quad (9)$$

Le résultat précédent est valable pour les matériaux non fragiles mais pour lesquels la taille de la FPZ peut être négligée (Bazant 1984). Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour des tailles de structures telles que la dimension de la FPZ n'est pas négligeable, la relation (9) n'est pas valable.

## Analyse des essais par la méthode des éléments finis

La fissuration de 4 tests est simulée. Les deux premiers spécimens sont en "Sitka spruce" (sp1 et sp2, tests 4, Tableau 1) avec des orientations RL et TL, une masse volumique de  $440 \text{ kg/m}^3$  et des énergies de fissuration proches des moyennes expérimentales ( $G_{RL} = 220 \text{ Nm/m}^2$ ,  $G_{TL} = 162 \text{ Nm/m}^2$ ). Les deux autres (sp 3 et sp4, tests 1, Tableau 1) sont en épicéa avec des orientations RL et TL, une masse volumique de  $400 \text{ kg/m}^3$  et des énergies de fissuration égales à :  $G_{RL} = 174 \text{ Nm/m}^2$ ,  $G_{TL} = 100 \text{ Nm/m}^2$ .

## Dans le cadre de la Mécanique Linéaire Elastique de la Rupture

La propagation de fissure est simulée en "déboutonnant" les nœuds doubles d'un maillage éléments finis disposés sur le chemin de propagation. Le taux de restitution d'énergie critique ( $G_c$ ), supposé indépendant de la structure, est identifié avec la force maximale ( $P_u$ ) et la longueur de fissure initiale ( $a_0$ ). Cette dernière ne semble ne pas avoir d'influence sur la valeur de  $G_c$  pour les spécimens DCB (Valentin et Morlier 1982) et SEN (Ewing and Williams 1979).

Les constantes élastiques ont été choisies dans un premier temps en accord avec la norme Européenne EN338 en fonction de la masse volumique : classe C30 pour sp1 et sp2 ( $E_L = 12 \text{ GPa}$ ,  $G_{LT} \cong G_{LR} = 0,75 \text{ GPa}$ ), classe C24 pour sp3 et sp4 ( $E_L = 11 \text{ GPa}$ ,  $G_{LT} \cong G_{LR} = 0,69 \text{ GPa}$ ). Le coefficient de Poisson  $\nu_{RL} = \nu_{TL}$ , choisi égal à 0,45, a peu d'influence. La norme EN338 donne un module transverse moyen ( $E_{90} = 1/2 (E_R + E_T)$ ) qui ne permet pas d'obtenir une raideur de poutre correcte. Ainsi,  $E_R$  et  $E_T$  ont été

identifiés pour chaque couple de spécimens avec la rigidité initiale de la poutre. Notons que les valeurs de  $E_R$  et  $E_T$  ont une influence majeure. Il a été trouvé :  $E_R = 1 \text{ GPa}$ ,  $E_T = 0,4 \text{ GPa}$  pour sp1 et sp2 et  $E_R = 0,53 \text{ GPa}$ ,  $E_T = 0,3 \text{ GPa}$  pour sp3 et sp4.

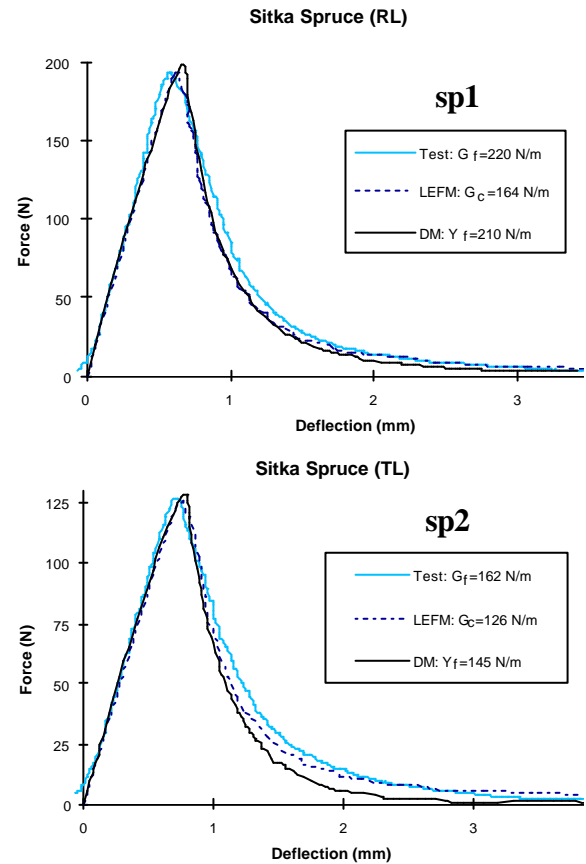
Ayant identifié  $G_c$ , la force P correspondant à une longueur de fissure a est calculée avec la relation  $G_c = G(P,a)$  (figures 9-12).

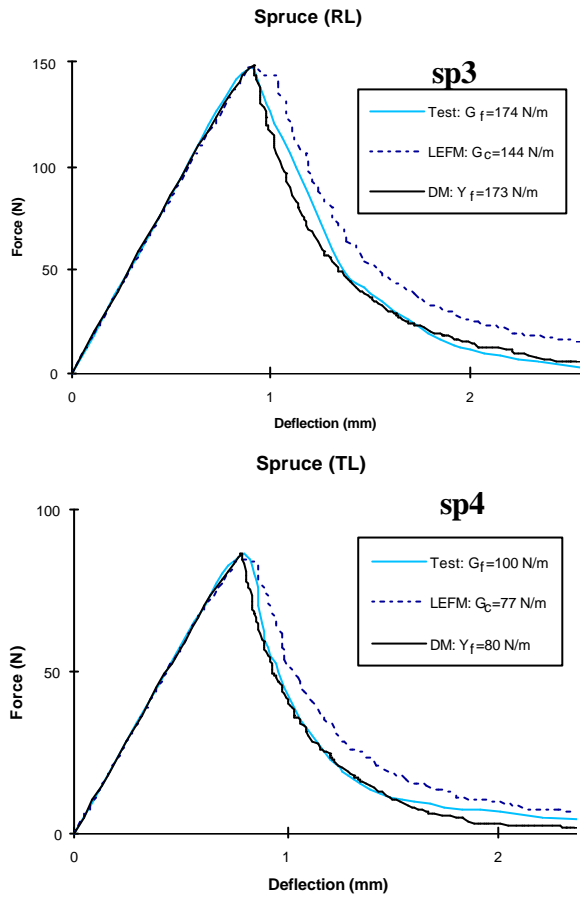
La comparaison des courbes numériques et expérimentales montre que l'approche par la MLER permet de prédire correctement la courbe force-déplacement mais la valeur identifiée de  $G_c$  est nettement différente de celle de  $G_f$ .

Ce résultat n'est pas surprenant car  $G_c$  est relatif à l'amorçage de la propagation d'une fissure "usinée" (sans FPZ à la pointe de fissure) tandis que  $G_f$  est relatif au processus global de dégradation c'est-à-dire à celui de la propagation d'une fissure "naturelle".

## Figures 9 à 12 – Courbes charge-déflexion pour les spécimens sp1 à sp4

### Load deflection curves for the specimen sp1 to sp4





### Dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement

La fissuration est maintenant modélisée au moyen d'éléments joints situés dans le plan médian de la poutre. Le coût de la résolution de ce problème non linéaire est du même ordre que par la MLER qui consiste en une série de résolutions de problèmes élastiques lorsque la fissure croît.

Les constantes élastiques ont été identifiées précédemment. Seuls les paramètres du modèle d'endommagement restent à identifier.

La figure 3 montre l'influence de la longueur de fissure initiale sur la courbe charge-déflexion pour un jeu de paramètres du modèle. Notons le "snap-back" (réponse instable) pour de courtes longueurs de fissures initiales justifiant une méthode de contrôle indirect du calcul (Riks 1979). Pour la longueur  $a_0 = 0,6 \text{ h}$ , la réponse dépend essentiellement de l'aire sous la courbe contrainte-déplacement relatif ( $Y_f$ ). La courbe  $a_0 = 0$  dépend de  $Y_f$ , des raideurs ( $k = k_2$ ;  $k_1 = 0$ ) et de l'exposant ( $n$ ) (3). Cela confirme que l'énergie de fissuration est le paramètre majeur gouvernant la propagation de fissure.

### Une proposition d'identification de la raideur $k$

D'après la remarque précédente,  $k$  et  $n$  peuvent être identifiés très grossièrement. Néanmoins, une

procédure d'identification fondée sur la notion de longueur caractérisant la FPZ est utilisée.

De telles longueurs caractéristiques furent introduites par Irwin (1958) en mécanique de la rupture des matériaux métalliques avec zone de plasticité confinée ou Hillerborg et al. (1976), Bazant et al. (1987, 1990) pour le béton et Gustafsson (1985, 1988) pour le bois. Une estimation de la longueur de la FPZ peut être obtenue d'après Irwin (1958) :

$$r_p = \frac{1}{2p} \left( \frac{K_{Ic}}{f_t} \right)^2 = \frac{l_{ch}}{2p} \quad (10)$$

$f_t$  est la résistance en traction. La relation entre le facteur d'intensité des contraintes et le taux de restitution d'énergie établie pour une fissure au sein d'un milieu isotrope infini en traction ( $G_{Ic} = K_{Ic}^2 / E$ ) associée à (9) et (10) permettent de définir la longueur caractéristique  $l_{ch}$  (Hillerborg et al. 1976) :

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{f_t^2} \quad (11)$$

Dans le cas d'un matériau orthotrope,  $E'$  doit être substitué à  $E$  (fissure selon  $x$ , traction selon  $y$ ) (Sih et al. 1965) avec  $E'$  :

$$E' = \sqrt{2E_y E_x} / \sqrt{\frac{E_x}{E_y} + \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy}} \quad (12)$$

La longueur établie dans la relation précédente permet essentiellement une comparaison des longueurs caractéristiques de différents matériaux :

- *Le béton :*

Une bonne approximation de  $G_f$  est :

$$G_f = 10 d_a \quad (13)$$

Avec  $G_f$  en  $\text{Nm/m}^2$  et  $d_a$ , le diamètre moyen de granulats en mm. Avec  $f_t = 5 \text{ MPa}$  et  $E = 30 \text{ GPa}$ , on obtient :

$$l_{ch} = 12 d_a \quad (14)$$

La relation précédente est celle trouvée par Bazant et Oh (1983). Soit avec  $d_a = 20 \text{ mm}$  :

$$l_{ch} = 240 \text{ mm} \quad (15)$$

- *Le bois :*

Avec  $f_t = 5 \text{ MPa}$ ,  $G_f = 200 \text{ Nm/m}^2$ ,  $E_x = 10 \text{ GPa}$ ,  $E_y = 0,3 \text{ GPa}$ ,  $G_{xy} = 0,5 \text{ GPa}$  et  $\nu_{xy} = 0,45$  on trouve :

$$l_{ch} = 5 \text{ mm} \quad (16)$$

- *Le verre :*

Avec  $f_t = 30 \text{ MPa}$ ,  $G_c = 5 \text{ Nm/m}^2$  et  $E = 70 \text{ GPa}$ , on trouve :

$$l_{ch} = 0,3 \text{ mm} \quad (17)$$

Il apparaît des différences importantes entre les longueurs caractéristiques de ces trois matériaux. Le

verre, matériau fragile, présente une longueur caractéristique 800 fois plus faible que celle du béton. Il est difficile de rattacher les longueurs  $l_h$  précédentes à l'hétérogénéité du matériau ou à un paramètre du modèle d'endommagement utilisé. Le déplacement relatif critique  $[u]_c$  pour lequel le matériau n'a plus de cohésion peut également caractériser la FPZ. Hillerborg (1976) relie  $[u]_c$  à  $G_f$  dans le cas d'une relation affine entre la contrainte en pointe de fissure et le déplacement relatif dans la FPZ ( $[u] = 0, \sigma = f_t$  ;  $[u] = [u]_c, \sigma = 0$ ).

$$[u]_c = \frac{2G_f}{f_t} \quad (18)$$

Soit :  $[u]_c = 0,08$  mm environ pour le bois. Gustafsson (1985) propose  $[u]_c = 0,2$  mm. Rappelons que cette valeur n'est qu'un ordre de grandeur compte tenu des nombreuses hypothèses simplificatrices. Cette dimension est proportionnelle à la taille de la zone endommagée en pointe de fissure lorsque la FPZ a atteint sa taille maximale. Dans le cadre du modèle proposé, ce déplacement critique peut être calculé avec (2) et (3) :

$$[u]_c = \sqrt{\frac{2(n+1)Y_f}{nk}} \quad (19)$$

Examinons le spécimen sp1 (supposons  $G_f = Y_f = 220$  Nm/m<sup>2</sup>). La valeur de l'exposant (n) est identifiée de telle sorte que la forme de la courbe simulée soit proche de celle expérimentale (n = 0,2). La valeur de k est choisie telle que  $[u]_c$  soit de l'ordre de 0,08 mm d'où :

$$k = 500 \text{ N/mm}^3 \quad (20)$$

Ce qui donne une valeur convenable pour  $f_t$  (4,5 MPa). Il a été vérifié que la valeur proposée de k n'est pas trop faible et n'affecte pas la raideur globale de la poutre.

Les valeurs précédentes de k et n sont gardées constantes pour les quatre simulations.  $Y_f$  est identifié de telle façon que les charges maximales simulées et obtenues expérimentalement soient sensiblement les mêmes. Les figures 9-12 donnent les valeurs de  $Y_f$  et les comparaisons entre les simulations par la ME et la MLER.

Les courbes charge-déplacement sont correctement décrites par l'approche fondée sur la ME.

Le point majeur est que pour l'orientation RL, l'énergie de fissuration expérimentale ( $G_f$ ) est très proche de la valeur de l'énergie de fissuration du modèle ( $Y_f$ ). Il y a une légère différence entre les valeurs de  $G_f$  et  $Y_f$  pour l'orientation TL vraisemblablement due à l'incertitude liée à l'identification des raideurs élastiques et des paramètres du modèle.

## Conclusions

### Expérimentations

La norme française de détermination de la résistance à la fissuration transverse du bois (NF B 51-011 1985) fondée sur la charge ultime permet difficilement de donner des recommandations de dimensionnement. Le test CIB-W18 pour la détermination de l'énergie de fissuration en tension perpendiculaire au fil est simple et fiable.

Une entaille fine, de longueur égale à 60% de la hauteur de la poutre, terminée avec une lame de rasoir, permet d'assurer une réponse stable (évolution continue de la force).

L'étude de l'effet d'échelle sur la résistance nominale montre que la MLER n'est pas valable pour l'étude du spécimen de hauteur 45 mm. Un résultat important est que l'énergie de fissuration ne dépend pas de la taille du spécimen pour les dimensions étudiées. La valeur moyenne de l'énergie de fissuration du bois blanc (épicéa et sapin, orientation quelconque) a une valeur proche de 200 Nm/m<sup>2</sup>. L'hypothèse consistant à considérer que ce paramètre est intrinsèque au matériau semble valable.

### Analyse numérique des essais

Un modèle d'interface fondé sur la Mécanique de l'Endommagement a été utilisé pour l'analyse de la fissuration en mode I. Un lien entre les paramètres des modèles ME et MLER permet l'identification des énergies de fissuration. Les éléments finis d'interface sont simples à implanter dans un code aux éléments finis. Ils nécessitent bien entendu de connaître a priori le chemin de propagation de la fissure.

Les comparaisons entre les résultats issus de l'approche par la MLER et les résultats expérimentaux de FTP ont montré que les valeurs identifiées des taux de restitution d'énergie critique ( $G_c$ ) étaient plus faibles que les énergies de fissuration mesurées expérimentalement. Cela est vraisemblablement dû au fait que les phénomènes non linéaires de dégradation dans la FPZ ne peuvent être négligés dans l'analyse de la poutre de hauteur 45 mm. Ce résultat confirme l'analyse expérimentale de l'effet d'échelle sur la résistance nominale.

La réponse charge-déflexion est correctement décrite par l'approche fondée sur la ME. De plus, il a été montré que l'énergie de fissuration était le paramètre majeur gouvernant la propagation de fissure et pouvait être utilisée comme paramètre matériau pour des analyses linéaires de fissuration de structures en bois (grandes structures) ou non linéaires (taille de FPZ non négligeable) (Daudeville et al., 1999).

### Remerciements

L'auteur tient à remercier pour leur collaboration, F. Dubois (Université de Limoges), J.D. Lanvin (CTBA), M. Yasumura (Shizuoka University), M. Ohta (Tokyo University)



## Bibliographie

- Aicher S.** 1992. Fracture energies and size effect laws for spruce and oak in mode I, Determination of fracture properties of wood especially in mode II and mixed modes I and II. Proceedings of the RILEM TC 133 Meeting, Bordeaux France.
- Aicher S., Reinhardt H.W. and Klöck W.** 1993. Nichtlineares bruchmechanik-maßstabsgesetz für fichte bei zugbeanspruchung senkrecht zur faserichtung. *Holz als Roh- und Werkstoff*. 51: 385-394.
- Allix O., Daudeville L., Neau J.L. and Ladevèze P.** 1995. Necessity of using damage mechanics for the analysis of delamination specimens. 4th. Conf. on Computational Plasticity COMPLAS IV, Barcelona.
- Bazant Z.P.** 1984. Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. *J. of Eng. Mechanics*. 104: 518-535.
- Bazant Z.P., Kazemi M.T.** 1990. Determination of fracture energy, process zone, length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete. *Int. J. of Fracture*. 44 (2): 111-131.
- Bazant Z.P., Pfeiffer P.A.** 1987. Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Mat. J.* 85: 463-480.
- Boström L.** 1988. The fictitious crack model - A fracture mechanics approach applied on wood. International Conference on Timber Engineering, Seattle DC. 2: 559-565.
- Daudeville L., Davenne L. and Yasumura M.** 1999. Prediction of the load carrying capacity of bolted timber joints. *Wood Science and Technology*. 33(1): 15-29.
- Ewing P.D., Williams J.G.** 1979. Thickness and moisture content effect in the fracture toughness of Scots Pine. *J. of Mat. Sc.* 14-12: 2959-2966.
- Garcia-Alvarez V.O., Carol I. and Gettu R.** 1994. Numerical simulation of fracture in concrete using joint elements. *Anales de Mecanica de la Fractura*. 11: 75-80.
- Gens A., Carol I. and Alonso E.E.** 1988. An interface element formulation for the analysis of soil-reinforcement interaction. *Comp. and Geotechnics*. 7: 133-151.
- Gustafsson P.J.** 1985. Fracture mechanics studies of non-yielding materials like concrete. Technical Report TVBM-1007. Lund Institute of Technology.
- Gustafsson P.J.** 1988. A study of strength of notched beams. 21th CIB-W18 meeting. Vancouver. Paper 21-10-1.
- Hillerborg A., Modeer M. and Petersson P.E.** 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*. 6: 773-782.
- Hohberg J.M., Bachmann H.** 1988. A macro joint element for non-linear arch dam analysis. Numerical Methods in Geomechanics, Ed. Swoboda G., Balkema, Rotterdam. 829-834.
- Hunt D.G., Croager W.P.** 1982. Mode II fracture toughness of wood measured by a mixed mode test method. *J. of Mat. Sc. Letters*. 1: 77-79.
- Irwin G.R.** 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *ASME J. of Applied Mech. Transactions*. 24(3): 361-364.
- Jenq Y.S., Shah S.P.** 1985. A two parameter fracture model for concrete. *J. Eng. Mech.* 111(4): 1227-1241.
- Larsen H.J., Gustafsson P.J.** 1989. Design of end-notched beams. 22th CIB-W18A meeting. Berlin. Paper 22-10-1
- Larsen H.J., Gustafsson P.J.** 1990. The fracture energy of wood in tension perpendicular to the grain. 23th CIB-W18A meeting. Lisbon. Paper 23-19-2.
- Lum C., Foschi O.** 1988. Arbitrary V-notches in orthotropic plates, *J. of Eng. Mech.* 114 (4): 638-655.
- Mall S., Murphy J.F. and Shottafer J.E.** 1983. Criterion for mixed mode fracture in wood, *J. of Eng. Mech.* 109 (3): 680-690.
- Morel S.** 1998. Effet d'échelle dans la rupture d'un matériau hétérogène (le bois). Thèse de l'Université Bordeaux I.
- Morel S., Valentin G.** 1996. Size effect in crack shear strength of wood. *J. Phys. IV, C6, 6* : 385-394.
- Murphy J.F.** 1986. Strength and stiffness reduction of large notched beams, *J. of Struct. Eng.* 112(9): 1989-2000.
- Nallathambi P., Karihaloo B.L.** 1986. Determination of specimen-size independent fracture toughness of plain concrete. *Magazine of Concrete Research*. 38 (135): 67-76.
- Ngo D., Scordelis A.C.** 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *J. of the American Concrete Institute*. 64 (14): 152-163.
- Patton-Mallory M., Cramer S.M.** 1987. Fracture mechanics: a tool for predicting wood component strength. *Forest Products Journal*. 37 (7-8): 39-47.
- Riks E.** 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int.J. of Solids and Structures*. 15: 524-551.
- Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R.** 1965. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *Int. J. of Fract. Mech.* 1: 189-203.
- Triboulot P., Jodin P. and Pluvinage G.** 1984. Validity of fracture mechanics concepts applied to wood and finite element calculation. *Wood Sc. and Tech.* 18(61): 11-24.
- Valentin G., Boström L., Gustafsson P.J., Ranta-Maunus A. and Gowda S.** 1991. Application of fracture mechanics to timber structures. RILEM state-of-art Report. Technical Research Centre of Finland, Espoo. Research Notes 1262.
- Valentin G., Morlier P.** 1982. A criterion of crack propagation in timber. *Mat. and Struct.* 15: 88-95.
- Wu E.M.** 1967. Application of fracture mechanics to anisotropic plates. *J. of Applied Mech. Series E* 34 (4): 967-974.