

---

# Une méthode simplifiée pour l'analyse du délaminage auprès d'un bord droit

**Laurent Daudeville, Pierre Ladevèze**

*Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS de Cachan / CNRS / Université P. et M. Curie  
61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France*

---

*RESUME : Une méthode simplifiée d'analyse au délaminage des structures stratifiées par la Mécanique de l'Endommagement est présentée. Les endommagements survenant auprès d'un bord droit d'une structure stratifiée sont concentrés sur les interfaces entre les couches. Le logiciel Éléments Finis EDA, intervenant en post-processeur d'une analyse élastique d'une coque stratifiée, permet la prédiction de l'initiation et de la propagation du délaminage. Des simulations numériques sont présentées et comparées avec des résultats expérimentaux issus de la littérature.*

*ABSTRACT : A simplified method based upon Damage Mechanics for the delamination analysis of composites is presented. In the neighbourhood of a quasi-straight edge of a laminated structure, damage is taken concentrated on the interface between layers. The Finite Element code EDA, acting as a post-processor of an elastic laminate shell computation, allows the prediction of delamination onset and propagation. Numerical simulations of delamination are given and compared with experimental results from literature.*

*MOTS-CLES : Stratifiés, endommagement, délaminage, éléments-finis*

*KEY-WORDS : Laminates, damage, delamination, finite-elements*

---

## 1. Introduction

On peut séparer en deux classes les modes de dégradation des stratifiés à fibres longues (T300-914 par exemple). La première concerne les endommagements intralaminaires : fissuration transverse de la matrice, décohésion de la liaison fibre-matrice, rupture de fibres . La seconde est relative à l'endommagement de la liaison entre les couches d'un stratifié, c'est le délaminage. Les structures stratifiées étant d'épaisseur faible (plaques ou coques), l'état de contraintes loin des zones bord (bords libres, zones d'application des efforts ,...) est un état de contraintes planes, tandis que dans les zones bord des structures l'état de contraintes peut être tridimensionnel. Ainsi, le délaminage, phénomène de décohésion des couches dû à d'éventuelles contraintes perpendiculaires au plan tangent de la coque, survient principalement dans les zones bord des structures.

Actuellement, dans les bureaux d'études, des calculs Éléments Finis en théorie de plaque ou coque stratifiée, combinés avec des critères basés sur les contraintes [TSA 71], sont généralement utilisés pour prédire la rupture. Une telle approche n'est pas toujours satisfaisante, soit que les critères utilisés ne permettent pas toujours de bien prendre en compte les différents phénomènes d'endommagement, soit que l'identification de tels critères passe par une procédure expérimentale coûteuse.

Dans l'analyse du délaminage, on distingue la phase de naissance d'une fissure, de la phase de propagation d'un délaminage établi. Pour la prédiction de l'initiation d'une fissure auprès d'un bord libre, des techniques de calcul de l'effet de bord en élasticité [ENG 81] [DUM 86] [BAR 83], associées à des critères basés sur la moyenne des contraintes normales sur une distance caractéristique depuis le bord de la structure [KIM 84], sont généralement utilisées en post-processeur d'un calcul élastique d'une coque stratifiée. Le caractère progressif des dégradations n'est pas bien pris en compte, le délaminage ne se produit pas forcément là où les contraintes sont maximum ; la distance caractéristique ne semble pas être un paramètre intrinsèque lorsque l'on fait varier la géométrie et l'empilement.

Pour l'analyse de la propagation d'un délaminage établi, des approches basées sur la Mécanique Linéaire de la Rupture sont généralement exploitées. Le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$ , et sa comparaison avec une quantité critique  $G_c$ , sont utilisés par de nombreux auteurs [WAN 85, 89] [O'BR 82] pour l'étude de la propagation d'une fissure. Néanmoins, cette approche ne permet pas de traiter le problème de l'initiation d'une fissure de délaminage.

L'approche que nous présentons pour l'analyse du délaminage est basée sur la Mécanique de l'Endommagement des Composites [TAL 89] [ALL 88] [LAD 90]. La démarche utilisée s'inscrit dans le cadre de l'approche proposée dans [LAD 90].

Le stratifié est modélisé par un empilement de couches homogènes reliées par des interfaces. L'interface est une entité surfacique assurant le transfert des contraintes et des déplacements entre couches adjacentes. Elle peut être considérée comme une couche d'épaisseur faible. L'effet des dégradations est pris en compte par l'intermédiaire des variations relatives des raideurs élastiques.

Des modèles plus ou moins complets ont été donnés pour la modélisation des phénomènes d'endommagement de la couche dans [LAD 92b] et de l'interface entre les couches dans [ALL 92]. Dans le cadre du délaminage d'une éprouvette DCB, dont la longueur de fissure est grande devant l'épaisseur de l'éprouvette, un lien a été établi dans [ALL 92] entre l'approche par la Mécanique de l'Endommagement et celle par la Mécanique de la Rupture donnant une interprétation mécanique des paramètres caractéristiques de la modélisation de l'interface.

Une méthode simplifiée pour l'analyse du délaminage auprès d'un bord d'une structure stratifiée est présentée. Les hypothèses de base sont : les endommagements sont pris concentrés sur les interfaces ; le bord est supposé quasi-droit permettant ainsi de ramener le problème initialement tridimensionnel à un problème posé dans une bande perpendiculaire au bord. Cette méthode est d'un coût réduit et d'une grande facilité d'utilisation pour la prédiction de l'initiation du délaminage et de sa propagation sur une courte distance.

Le principe de l'approche a déjà été donné dans [DAU 90] ; nous insistons ici sur les stratégies de calcul et sur l'application de cette approche à différents exemples de délaminage.

L'analyse effectuée porte sur une section bord où les interfaces sont endommageables et en conséquence la réponse peut présenter un point critique. Pour simuler la réponse, et notamment au-delà du point critique, une méthode de type RIKS [RIK 79] [CRI 83] est utilisée dans laquelle l'ouverture en pointe de fissure est contrôlée. Cette technique est proche de celle utilisée dans [SCH 91] où un autre modèle d'interface est utilisé. Pour les stratifiés qui comportent un grand nombre de couches, nous proposons une stratégie de calcul qui permet de réduire les coûts.

Un logiciel appelé EDA a été développé, il agit en post-processeur d'une analyse de coque stratifiée élastique.

Des illustrations numériques sont présentées pour l'analyse de différents problèmes de délaminage pour des chargements quasi-monotones.

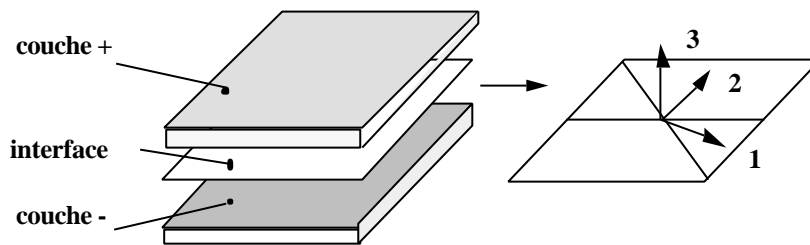
Le premier problème étudié est celui du délaminage d'une éprouvette DCB. L'initiation du front est simulée ainsi que celui de la propagation.

Le deuxième problème concerne l'analyse de l'initiation du délaminage auprès du bord libre d'une éprouvette en tension ou compression. Après avoir identifié les paramètres sur un empilement particulier, les résultats de calcul sont comparés à des résultats expérimentaux [KIM 84, 86] [ROD 78]. La comparaison est faite pour des empilements présentant un délaminage en mode I ou en mode mixte.

## 2. Analyse du délaminage par la mécanique de l'endommagement

### 2.1. Modélisation du stratifié

Le stratifié est modélisé par un empilement de couches homogènes reliées par des interfaces [LAD 90].



**Figure 1.** Modélisation du stratifié

L'interface est le siège des dégradations de délaminage. Ses principales caractéristiques sont :

- *le comportement est supposé orthotrope* : l'influence des couches adjacentes sur le comportement endommageable de l'interface est prise en compte par les bissectrices des directions de fibres supposées être les directions d'orthotropie. La relation de comportement de l'interface relie les contraintes normales au saut du déplacement entre les couches, elle s'écrit en élasticité :

$$s \mathbf{N}_3 = \mathbf{K}_{\text{int}} [\mathbf{U}] \quad \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_1] \\ [u_2] \\ [u_3] \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} [\mathbf{U}] = \mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^- = [u_1]\mathbf{N}_1 + [u_2]\mathbf{N}_2 + [u_3]\mathbf{N}_3 \\ \text{saut du déplacement entre les plis + et -} \end{cases}$$

On peut distinguer les cas :

$$\begin{cases} k_1^0 = k_2^0 = k_3^0 = 0 & \text{décohésion complète entre les couches} \\ k_1^0 = k_2^0 = k_3^0 = \infty & \text{liaison parfaite entre les couches} \end{cases}$$

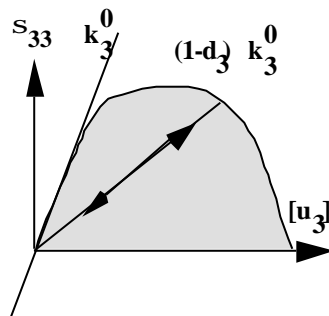
Le mode d'ouverture selon la direction 3 correspond au mode I de l'appellation classique de la Mécanique de la Rupture. Les déplacements selon les directions 1 et 2 correspondent aux modes II et III.

Ce type de modélisation a déjà été utilisée dans [LEN, 81] pour la modélisation du comportement de l'interface fibre-matrice.

- *l'endommagement est unilatéral en traction selon la direction 3 (mode I) : seul le mode d'ouverture dans la direction 3 contribue à l'endommagement.*

- *l'endommagement est quantifié par les variations relatives des modules de rigidité : trois variables scalaires  $d_i$  sont introduites associées aux trois rigidités  $k_i^0$ .*

- *le comportement est supposé élastique endommageable. C'est une première proposition, un comportement anélastique peut également être pris en compte [ALL 92].*



**Figure 2.** Comportement élastique endommageable (traction selon la direction 3)

L'interface sera considérée localement délaminée lorsque sa résistance à l'ouverture devient nulle, c'est-à-dire, selon la direction 3 par exemple, lorsque  $d_3$  atteint la valeur unité.

Le potentiel thermodynamique, duquel dérivent les lois d'état, est l'énergie de déformation :

$$E_D = \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0(1-d_3)} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_1^0(1-d_1)} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0(1-d_2)} \right]$$

$\langle \cdot \rangle_+$  désigne la partie positive.

Les variables  $Y_{d_i}$  sont les forces thermodynamiques conjuguées des variables

d'endommagement  $d_i$  :  $Y_{d_i} = \left( \frac{\partial E_D}{\partial d_i} \right)_{\sigma = \text{cte}}$

$$Y_{d_1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{31}^2}{k_1^0(1-d_1)^2} \quad ; \quad Y_{d_2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0(1-d_2)^2} \quad ; \quad Y_{d_3} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0(1-d_3)^2}$$

Un premier choix de loi d'évolution de l'endommagement :

Il est supposé que l'évolution des différentes variables d'endommagement est régie par la force thermodynamique  $\underline{Y}$  qui couple les forces  $Y_{d_1}$ ,  $Y_{d_2}$  et  $Y_{d_3}$ .

$$\underline{Y} = \sup_{\wedge \tau = t} (Y_{d_3} + \gamma_1 Y_{d_1} + \gamma_2 Y_{d_2}) \quad \gamma_1, \gamma_2 \text{ constantes de couplage}$$

Lorsque l'interface est délaminée selon le mode I d'ouverture (direction 3), celle-ci est supposée ne plus avoir de résistance selon les directions 1 et 2.

Les lois d'évolution sont :

$$\begin{cases} d_3 = w(\underline{Y}) \text{ si } d_3 < 1 \\ d_3 = 1 \text{ sinon} \\ d_1 = \gamma_1 w(\underline{Y}) \text{ si } d_1 < 1 \text{ et } d_3 < 1 \\ d_1 = 1 \text{ sinon} \\ d_2 = \gamma_2 w(\underline{Y}) \text{ si } d_2 < 1 \text{ et } d_3 < 1 \\ d_2 = 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec } w(\underline{Y}) = \frac{\langle \underline{Y} - Y_0 \rangle_+^n}{(Y_C - Y_0)^n}$$

$Y_0$ ,  $Y_C$  et  $n$  sont des paramètres caractéristiques de la loi d'évolution de l'endommagement de l'interface.  $Y_0$  est une énergie seuil correspondant au début de l'endommagement et  $Y_C$  une énergie critique correspondant à la détérioration locale complète de l'interface.

## 2.2. Lien avec la Mécanique de la Rupture

Les essais classiques de la Mécanique de la Rupture [WHI 89] pour un chargement quasi-monotone et une interface donnée, permettent d'obtenir les trois ténacités caractéristiques  $G_{IC}$ ,  $G_{IIC}$ ,  $G_{IIIC}$ , relatives aux modes I, II et III.  $G_{IC}$ ,  $G_{IIC}$  et  $G_{IIIC}$  sont différentes [SEL 89] en raison du caractère orthotrope de l'interface.

Un lien entre l'approche par la Mécanique de la Rupture et celle par la Mécanique de l'Endommagement, dans le cadre du délaminage d'une éprouvette DCB dont la longueur de fissure est grande devant l'épaisseur, a été effectué dans [ALL 92]. Ce résultat fournit une relation pour l'identification des paramètres caractéristiques de l'interface.

Les résultats qui suivent permettent également d'établir une relation entre les ténacités issues de la Mécanique de la Rupture et les paramètres caractéristiques de l'interface, il s'agit là d'une autre interprétation que celle de [ALL 92].

$G_C$  peut être interprété comme le travail fourni par unité de surface pour la décohesion de l'interface (par exemple en mode I correspondant à l'ouverture selon la direction 3) :

$$G_{IC} = \int_0^{[u_{3c}]} \sigma_{33} d[u_3]$$

avec  $[u_{3c}] = [u_3]_{\&d3=1}$  ; l'interface est alors localement complètement détériorée.

$G_{IC}$  est donc l'aire hachurée relative à la courbe représentée (Figure 2). En mode I pur, on trouve :

$$G_{IC} = Y_0 + \frac{n}{n+1} (Y_C - Y_0) \quad (1)$$

Concernant l'identification pour des modes d'ouverture selon les directions 1 ou 2, on se place pour simplifier dans la situation où les directions 1 et 2 peuvent être associées aux modes II et III classiques de détérioration. On trouve alors :

$$G_{\alpha c} = Y_0 \left( \frac{2}{\gamma_i} - 1 \right) + \frac{1}{\gamma_i^{(1/n+1)}} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_i^{(n+1)}} \right) (Y_c - Y_0) \quad \begin{cases} \alpha = \text{II, III} \\ i = 1, 2 \end{cases}$$

Les relations établies fournissent des relations pour l'identification des paramètres caractéristiques de l'interface :  $Y_0$ ,  $Y_c$ ,  $n$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ .

Notons dès à présent que la donnée d'une ténacité pour un mode pur de fissuration,  $G_{Ic}$  par exemple, ne suffit pas pour l'identification car elle ne fournit qu'une information sur l'aire de la courbe contrainte en fonction du saut du déplacement et non sur la forme de cette courbe. Il sera donc intéressant d'étudier le cas de l'initiation du délaminage c'est-à-dire la situation où la fissure initiale est de longueur nulle.

L'approche par la Mécanique Linéaire de la Rupture suppose qu'il existe une fissure initiale grande devant l'épaisseur de l'éprouvette. Lors de la présentation de la simulation du délaminage d'une éprouvette DCB par la Mécanique de l'Endommagement, il sera montré que l'on retrouve les résultats précédents même pour une longueur de fissure petite, ce qui est surprenant.

### 3. Stratégies de calcul

#### 3.1. Le problème d'effet de bord

On considère dans un premier temps que les interfaces sont non endommageables, le comportement de la structure est alors élastique linéaire.

##### 3.1.1. Rappels sur la formulation du problème en élasticité

La coque stratifiée, d'épaisseur  $2h$  occupe le domaine  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ .  $\Omega_2$  est la zone bord, sa profondeur est de l'ordre de  $2h$ .  $\Omega_1$  est la zone intérieure.

La structure est supposée soumise à une densité surfacique d'effort  $\mathbf{F}$  sur le bord  $\partial\Omega_2$  de normale  $\mathbf{x}$ .



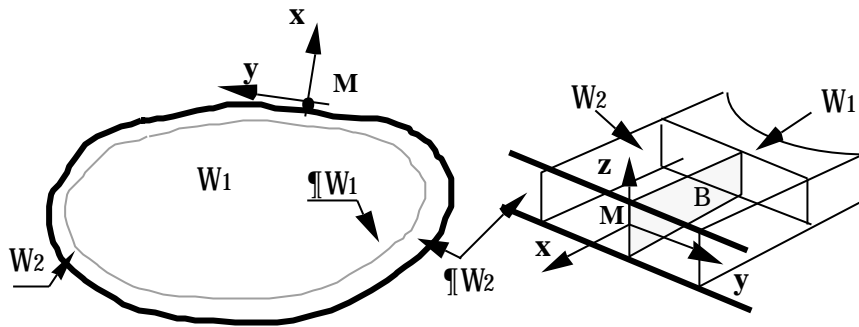


Figure 3. Zones intérieure et bord, bord faiblement courbé

Le couple déplacement-contrainte  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\sigma})$  solution (tridimensionnelle) du problème élastique posé sur  $\Omega$  s'écrit lorsque l'épaisseur  $2h$  est faible devant les dimensions transversales [FRI 61] [LAD 88] :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_P + \mathbf{U}_E \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P + \boldsymbol{\sigma}_E \end{cases}$$

avec  $\begin{cases} (\mathbf{U}_P, \boldsymbol{\sigma}_P) : \text{Solution du problème de type plaque ou coque} \\ (\mathbf{U}_E, \boldsymbol{\sigma}_E) : \text{Solution localisée près du bord} \end{cases}$

La solution de type plaque ou coque ne vérifie généralement pas la condition limite sur le bord  $\Omega_2$ . L'hétérogénéité dans l'épaisseur accentue l'influence du résidu.

$$\Delta_z \text{ sur } [-h, h] \mathbf{R}(z) = \mathbf{F}(z) - \boldsymbol{\sigma}_P(z) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

A  $(\mathbf{U}_P, \boldsymbol{\sigma}_P)$  solution valable loin du bord  $\Omega_2$ , se superpose donc  $(\mathbf{U}_E, \boldsymbol{\sigma}_E)$  tel que  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\sigma})$  satisfasse les équations et conditions aux limites du problème tridimensionnel.  $(\mathbf{U}_E, \boldsymbol{\sigma}_E)$  est localisée dans le voisinage de  $\Omega_2$ . On peut donc rechercher la solution d'effet de bord en post-processeur du calcul de  $(\mathbf{U}_P, \boldsymbol{\sigma}_P)$  ; c'est-à-dire après avoir effectué un calcul classique en théorie de plaque ou de coque conduisant à  $(\mathbf{U}_P, \boldsymbol{\sigma}_P)$ . Le problème à résoudre pour la détermination de  $(\mathbf{U}_E, \boldsymbol{\sigma}_E)$  est défini sur  $\Omega_2$ .

Si l'on se place dans le cas où le rayon de courbure de la plaque ou de la coque est grand devant l'épaisseur, alors les variations de  $(\mathbf{U}_E, \boldsymbol{\sigma}_E)$  suivant la tangente au bord  $(y)$  sont négligeables devant celles en  $x$  et en  $z$  : le problème se ramène à la résolution d'un problème plan posé dans une bande semi-infinie  $B$ . Pour faciliter le calcul, la

bande  $B$  est tronquée à une distance de l'ordre de  $2h$ . A cette distance depuis le bord 2, la solution localisée est négligeable devant la solution du problème de type plaque ou coque.

Le calcul de la solution localisée d'effet de bord, revient à trouver  $(\mathbf{U}_E, \boldsymbol{\sigma}_E)$  définis sur  $B$  tels que :

$$\mathbf{U}_E \quad \mathbf{U} = \left\{ \mathbf{V}, \text{à énergie finie} / \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \leftrightarrow B \right\}$$

$$\Delta \mathbf{v} \quad \mathbf{U} \sum_i \int_{B_i} \boldsymbol{\Sigma}^T(\mathbf{U}_E) \mathbf{K}_{\text{cou}} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{V}) \, dx \, dz + \sum_j \int_{\Gamma_j} [\mathbf{U}_E] \mathbf{K}_{\text{int}} [\mathbf{V}] \, dx = \sum_i \int_{2 \leftrightarrow B_i} \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} \, dz$$

avec :  $B_i$   $i^{\text{ème}}$  couche ;  $\Gamma_j$   $j^{\text{ème}}$  interface

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} v_{x,x} & \frac{1}{2}v_{y,x} & \frac{1}{2}(v_{x,z}+v_{z,x}) \\ \frac{1}{2}v_{y,x} & 0 & \frac{1}{2}v_{y,z} \\ \frac{1}{2}(v_{z,x}+v_{z,x}) & \frac{1}{2}v_{y,z} & v_{z,z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}^T : \text{transposée de } \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\text{et } \mathbf{K}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} k_1^0(1-d_1) & 0 & 0 \\ 0 & k_2^0(1-d_2) & 0 \\ 0 & 0 & k_3^0(1-d_3) \end{pmatrix} \text{ dans la base d'orthotropie de l'interface}$$

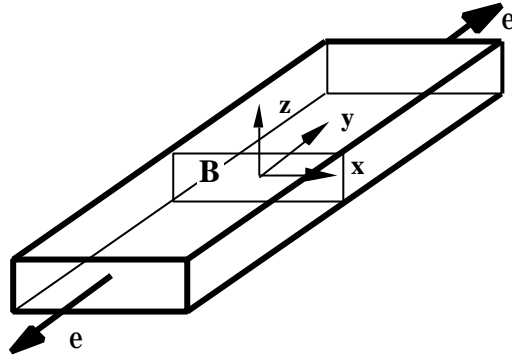
Pour un comportement élastique non endommageable, les valeurs de  $d_i$  ( $i=1,2,3$ ) sont nulles.

### 3.1.2. Résolution du problème avec interfaces endommageables

Lorsque l'épaisseur du stratifié est petite, l'effet de bord ainsi que les dégradations de délaminage qui lui sont associées, sont localisés dans un voisinage du bord.

L'application, comme en élasticité, du principe de superposition est possible pour le calcul de  $(\mathbf{U}_E, \boldsymbol{\sigma}_E)$  à condition que la zone fissurée reste de longueur courte devant l'épaisseur du stratifié. Le problème à résoudre devient un problème d'évolution non linéaire posé dans la bande  $B$ .

Pour vérifier la validité de l'application du principe de superposition, nous avons comparé les résultats de deux calculs d'un barreau en traction selon la direction  $y$ . Pour ces deux calculs, le stratifié est modélisé par un empilement de couches élastiques reliées par des interfaces élastiques endommageables ( $d_1, d_2$  et  $d_3 \neq 0$ ).



**Figure. 4.** Poutre de longueur infinie en traction

Un premier calcul permet d'accéder à la solution exacte du problème tridimensionnel traité, en recherchant le déplacement sous l'hypothèse de PIPES et PAGANO [PIP 70] :

$$\mathbf{U}(x,y,z) : \begin{cases} u(y,z) \\ v(y,z) + \varepsilon y \\ w(y,z) \end{cases}$$

Notons que la recherche du déplacement sous cette forme n'est valable que pour l'étude d'un barreau de longueur grande.

Un second calcul est effectué pour obtenir une solution approchée du problème avec interfaces endommageables par l'application du principe de superposition.

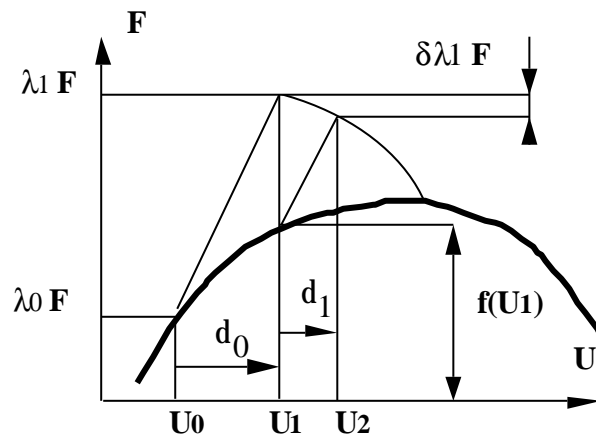
La figure 5 représente la déformation longitudinale en fonction de la longueur de fissure divisée par l'épaisseur du stratifié pour un empilement (30,-30,90)s en T300-5208. Notons que pour cet exemple, l'initiation du délaminage correspond au maximum de déformation atteint pour une longueur de fissure nulle. Le délaminage s'initie sur l'interface 90-90 pour un mode I de sollicitation.

Les deux courbes sont très proches confirmant la possibilité de traiter le problème d'effet de bord par application du principe de superposition dans ce cas particulier où l'endommagement est concentré aux interfaces.

**Figure 5.** Courbe déformation-longueur de fissure pour le stratifié (30,-30,90)s. Comparaison solution approchée et solution du problème de PIPES et PAGANO.

### 3.2. Une méthode de type RIKS

En raison de l'endommagement des interfaces, un point d'instabilité peut apparaître. Ce point ne peut être franchi avec une méthode de NEWTON dont le pilotage est de type "effort" (Figure 6). Une méthode de RIKS [RIK 79] [CRI 83] permet de contrôler le calcul et de franchir un tel point critique.



**Figure 6.** Méthode de type RIKS

Dans un schéma Élément finis, la méthode s'écrit (voir Figure 6) :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_a \delta_i = \lambda_{i+1} \mathbf{F} - \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) & \text{pour } i = 0 : \mathbf{U}_0, \delta\lambda_0 \text{ sont connus, } \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) = 0 \\ \lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta\lambda_i & \text{pour } i \neq 0 : \text{"l'effort" est relâché, il faut donc} \\ & \text{une "contrainte" } g(\delta\lambda_i) = 0 \end{cases}$$

On peut écrire le problème sous la forme :

$$\text{Erreur} = \mathbf{F}; \mathbf{d}_i = \mathbf{d}\text{Erreur} + \delta\lambda_i \mathbf{d}\text{Erreur} \quad (2)$$

RIKS et CRISFIELD proposent une "contrainte"  $g(\delta\lambda_i) = 0$  portant sur la norme du vecteur global  $\mathbf{d}_i$ . Ces "contraintes" globales peuvent conduire à une non convergence de l'algorithme dans le cas où l'endommagement se localise sur une zone restreinte de la structure. Pour garantir la convergence de l'algorithme, nous proposons d'utiliser une "contrainte" locale car elle ne fait intervenir que les degrés de liberté les plus significatifs dans l'accroissement de l'endommagement.

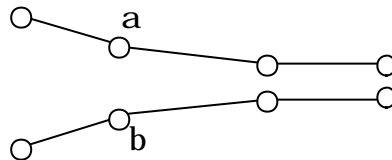


Figure 7. Nœuds participant à la contrainte

A l'incrément considéré, on repère l'interface la plus détériorée. Soit  $\alpha$  le numéro du nœud appartenant au premier élément non complètement fissuré le plus proche du bord ( $\beta$  est le nœud adjacent situé sur la même interface mais sur la couche voisine). Soit  $n$  (1, 2 ou 3) le mode d'endommagement principal.

La "contrainte" locale consiste à bloquer le saut du déplacement entre  $\alpha$  et  $\beta$  selon la direction  $n$ .

Erreur :  $\mathbf{d}\text{Erreur}$  et  $\mathbf{d}\text{Erreur}$  déterminés par résolution de (2);  $\mathbf{d}_i$  Erreur -

$$\left( \mathbf{d}_i \right)_n^\beta = 0 \quad \delta\lambda_i = - \text{Erreur} - \left( \mathbf{d}\text{Erreur} \right) \text{Erreur} ; \left( \mathbf{d}\text{Erreur} \right) \text{Erreur} - \left( \mathbf{d}\text{Erreur} \right) \left( \mathbf{d}_i \right)_n^\alpha \quad (i=1)$$

### 3.3. Une méthode pour traiter les grands nombres de couches

L'opérateur  $\mathbf{K}_a$  (voir (2)) est l'opérateur de comportement tangent  $\mathbf{K}_T$  ou l'opérateur de comportement sécant  $\mathbf{K}_E$  (c'est-à-dire calculée avec le comportement élastique endommageable). La résolution du système (2) peut être effectuée par la méthode de factorisation de CROUT. Dans le cas d'un grand nombre de couches, cette méthode peut être coûteuse en raison de la taille de la matrice  $\mathbf{K}_a$ . Nous proposons dans ce cas d'utiliser la méthode du gradient conjugué avec conditionneur.

Dans ce cas on choisit :  $\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_E$

Les deux systèmes (2) à résoudre sont de la forme :

$$\mathbf{K}_E \mathbf{d} = \mathbf{R} \quad \text{avec } \mathbf{K}_E = \mathbf{K}_{\text{cou}} + \mathbf{K}_{\text{int}}$$

$\mathbf{K}_{\text{cou}}$  et  $\mathbf{K}_{\text{int}}$  sont respectivement les contributions des couches ( $\mathbf{K}_{\text{cou}}$  est une matrice constante) et des interfaces ( $\mathbf{K}_{\text{int}}$  est non constante car les interfaces sont endommageables). La méthode du gradient conjugué avec conditionneur consiste à substituer à la résolution directe du système précédent une série de résolutions itératives de la forme :

$$\mathbf{K}_{\text{cou}} \mathbf{Z}_n = \mathbf{R} - \mathbf{K}_E \mathbf{d}_n$$

avec  $\mathbf{d}_n$  approximation de  $\mathbf{d}$  à l'itération  $n$  de l'algorithme du gradient conjugué.

La matrice  $\mathbf{K}_{\text{cou}}$  étant diagonale par blocs, les opérations coûteuses sont ainsi parallélisées sur chacune des couches.

#### 4. Simulations numériques du délaminage

Un logiciel Éléments Finis nommé EDA (Edge Damage Analysis) a été réalisé pour traiter le problème de l'initiation du délaminage et de sa propagation sur une courte distance auprès d'un bord quasi-droit d'une structure stratifiée.

Ce logiciel est indépendant de tout code Éléments Finis, les données sont les déformations ou contraintes issues d'un calcul classique en théorie de plaque ou de coque, les directions des couches par rapport à la normale au bord et les paramètres caractéristiques de la modélisation du stratifié.

##### 4.1. Identification du modèle

Les paramètres caractéristiques du modèle d'interface sont :

- les rigidités initiales :  $k_1^0, k_2^0, k_3^0$

- les énergies seuil et critique :  $Y_0, Y_c$
- l'exposant de la loi d'évolution :  $n$
- les termes de couplage entre modes :  $\gamma_1, \gamma_2$

Pour les simulations numériques proposées nous avons considéré a priori, en raison du manque d'informations, que :

- les paramètres caractéristiques sont indépendants du type d'interface c'est-à-dire de l'angle entre les couches adjacentes

- par symétrie, les directions 1 et 2 jouent des rôles semblables, soit :

$$k_1^0 = k_2^0 \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

- l'énergie seuil  $Y_0$  est nulle. L'énergie seuil  $Y_0$  correspond, en mode I, au seuil d'endommagement ( $d_3=0$ ). Une meilleure valeur pourrait être obtenue en détectant le début d'endommagement par émission acoustique ou en supposant que la contrainte limite en traction transverse  $\sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0$  de la couche est la même pour l'interface.

- l'exposant de la loi d'évolution de l'endommagement de l'interface est choisi égal à celui, déterminé expérimentalement, de la loi d'évolution de l'endommagement de la monocouche [LAD 92b], soit :  $n = 0.5$

Concernant les rigidités, l'interface peut être considérée comme une région riche en résine d'épaisseur  $e_I$  faible devant l'épaisseur de la monocouche  $e_C$ . Par cette

analogie et en considérant que  $\frac{e_I}{e_C} \ll 1$ , le comportement élastique de l'interface peut

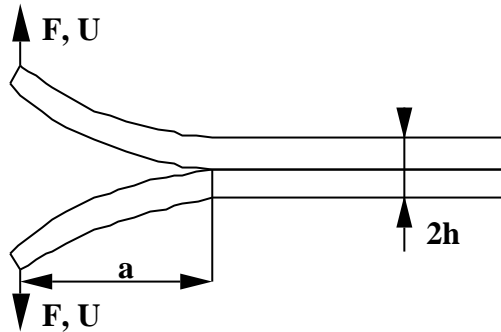
s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_1] \\ [u_2] \\ [u_3] \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1^0 = \frac{G_{13}}{e_I} \\ k_2^0 = \frac{G_{23}}{e_I} \\ k_3^0 = \frac{E_3}{e_I} \end{cases}$$

Ainsi, par cette analogie, la donnée des rigidités de l'interface est équivalent à la donnée d'une épaisseur fictive de la couche de résine équivalente  $e_I$  où les phénomènes de délaminage interviennent. Par cette analogie, il est possible d'avoir un ordre de grandeur des modules de rigidité de l'interface.

L'identification des paramètres du modèle d'endommagement de l'interface peut également être effectuée par l'exploitation des essais classiques de la Mécanique de la Rupture [WHI 89] en mode I (éprouvette DCB Figure 8), en mode II (éprouvette ENF) et en mode III (éprouvette SCB).

#### 4.2. Poutre DCB



**Figure 8. Essai DCB**

Le délaminage de l'éprouvette DCB est simulé avec le logiciel EDA. Notons que pour cette simulation, le calcul n'intervient pas en post-processeur d'un calcul de coque, la solution tridimensionnelle exacte d'une éprouvette de largeur grande est calculée.

L'éprouvette DCB étudiée est un stratifié T300-M10 de 48 plis orientés à 0° d'épaisseur  $e_C = 0.1375$  mm. La simulation numérique du délaminage a été effectuée sans fissure initiale. La largeur de l'éprouvette est  $2b = 20$ mm

Les résultats expérimentaux [LAK 91], obtenus à partir d'une éprouvette DCB comportant une fissure initiale de 28.5 mm, sont :

**Erreur !)      Erreur !)**       $G_{Ic} = 450 \text{ J/m}^2$

Les modules d'élasticité relatifs à la direction 3 ( $E_{33}, G_{13}, G_{23}, \nu_{13}, \nu_{23}$ ) sont supposés égaux à ceux de la direction 2.

Les rigidités d'interface sont choisies telles que l'épaisseur de la couche de résine équivalente est :  $e_I = \frac{e_C}{5}$

La vérification de la relation (1) associée au choix  $Y_0 = 0, n = 0.5$  conduisent à :



$$Y_c = 3 G_{Ic} = 1350 \text{ J/m}^2$$

La figure 9 représente la charge F (en Newtons) en fonction du déplacement U (en mm), la longueur de fissure évoluant de  $a = 0$  jusqu'à  $a = 30 \cdot h$ .

**Figure 9. Courbe F - U**

Connaissant la charge F et le déplacement U associés à la longueur de fissure a, il est possible de calculer le taux de restitution d'énergie  $G_{Ic}$  (par la méthode des aires [WHI 89] voir Figure 9). La valeur  $G_{Ic}$  correspond à la valeur expérimentale et l'on vérifie que le taux de restitution d'énergie critique est indépendant de la longueur de fissure (voir Figure 10). Ce résultat a été établi analytiquement dans [ALL 92] et vérifié expérimentalement dans [LAK 91]. Le point important ici est que la simulation numérique a permis de retrouver ce résultat même pour des longueurs de fissure courtes ( $a < 2h$ ).

**Figure 10.** *Courbe  $G_{Ic} - a$*

La courbe charge-déplacement est maintenant étudiée dans la zone proche de l'initiation en testant différentes valeurs de  $Y_0$ ,  $Y_c$  et  $n$  assujetties à vérifier (1). A la vue des résultats numériques, on constate (voir Figure 11) :

- pour ce qui concerne la propagation, c'est-à-dire lorsque la longueur de fissure devient suffisamment grande ( $a > h$ ), les valeurs de  $Y_0$ ,  $Y_c$ ,  $n$  sont peu influentes sur la réponse (F,U). Cela confirme que le taux de restitution d'énergie critique est la grandeur caractéristique gouvernant la propagation de la fissure.

- pour ce qui concerne l'initiation, c'est-à-dire lorsque la longueur de fissure est courte ( $a \simeq 0$ ), la réponse dépend des valeurs  $Y_0$ ,  $Y_c$  et  $n$  du modèle d'endommagement de l'interface. L'identification de ces paramètres caractéristiques passe donc par l'étude de l'initiation.

**Figure 11.** Courbes  $F - U$  à l'initiation (différents jeux de paramètres  $Y_0$ ,  $Y_c$  et  $n$ )

#### **4.3. Délaminage auprès du bord libre d'une éprouvette en tension ou compression**

##### **4.3.1. Initiation auprès du bord libre**

Le modèle permet l'étude de l'initiation et de la propagation d'une fissure de délaminage. Les paramètres du modèle ne peuvent être identifiés par la seule donnée des ténacités issues d'essais de propagation d'une fissure. Les éprouvettes classiques d'essais de la Mécanique de la Rupture (DCB, ENF, SCB) ne semblent pas convenir pour l'étude de l'initiation, c'est-à-dire sans fissure initiale. Il paraît plus judicieux d'exploiter les résultats expérimentaux d'initiation du délaminage auprès du bord libre d'une éprouvette en tension ou compression (voir Figure 4).

Des résultats de simulation de délaminage d'éprouvettes constituées d'empilements symétriques pour lesquels le délaminage s'était produit en mode I (sur l'interface centrale) ou en mode mixte ont été comparées avec des résultats expérimentaux pour des éprouvettes en T300-5208 [KIM 84] [ROD 78] et T300-934C [KIM, 86].

Les auteurs [KIM 84, 86] proposent les mêmes caractéristiques élastiques pour les matériaux T300-5208 et T300-1034C.

**Erreur !      Erreur !**

L'épaisseur du pli élémentaire est :  $e_C = 0.125$  mm

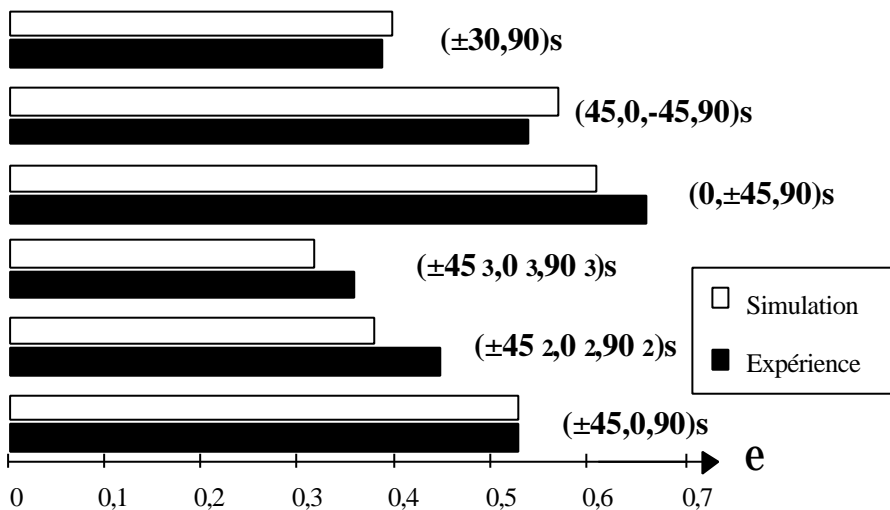
De même que les auteurs [KIM 84, 86] le suggéraient pour les grandeurs élastiques, les comportements endommageables des matériaux T300-5208 et T300-1034C sont supposés proches et donc que les paramètres du modèle sont les mêmes pour ces deux matériaux.

Les paramètres  $Y_0$ ,  $n$  et les rigidités d'interface, sont choisis a priori :

$$Y_0 = 0, n = 0.5 ; \frac{e_I}{e_C} = 0.3$$

Dans un premier temps sont étudiées des éprouvettes avec des empilements présentant un délaminage en mode I [KIM 84] [ROD 78].  $Y_C$  est identifié sur l'empilement  $(\pm 45, 0, 90)_s$ .

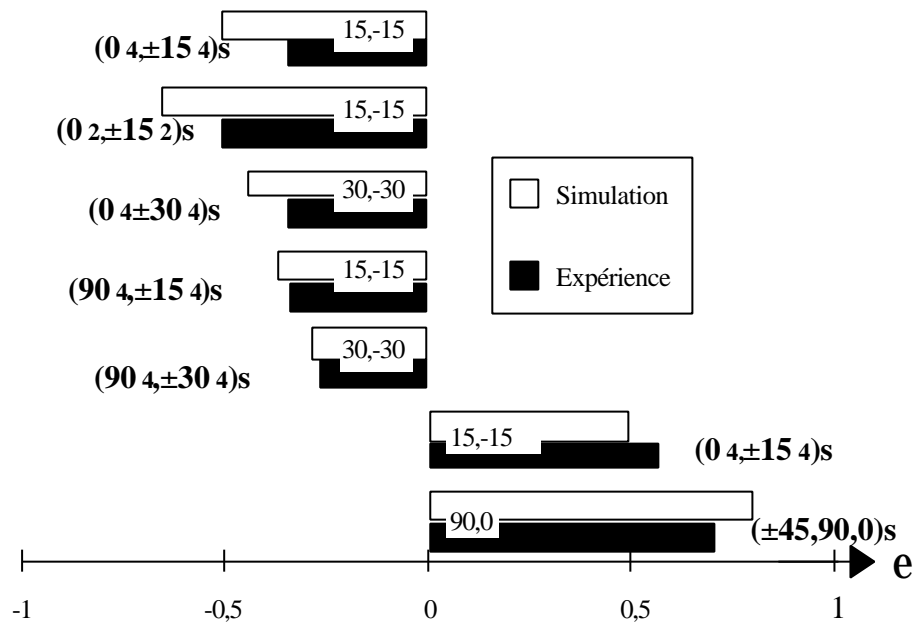
Le modèle est ensuite validé par comparaison des résultats de simulations avec les résultats expérimentaux pour d'autres empilements sollicités en mode I.



**Figure 12.** Comparaison simulation-expérience en mode I

La déformation reportée (Figure 12 et 13) correspond au maximum de déformation (en général pour  $a=0$ ) de la courbe déformation-longueur de fissure obtenue par la simulation ( voir Figure 5 pour l'empilement  $(\pm 30, 90)_s$ ).

Il est fait de même avec des essais effectués dans [KIM 86] pour lesquels le délaminage s'est produit en mode mixte.  $Y_0$ ,  $Y_c$ ,  $n$  et  $\frac{e_I}{e_C}$  gardent les mêmes valeurs que pour la simulation du délaminage en mode I.  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont déterminés de telle sorte que les résultats numériques soient proches des résultats expérimentaux (on trouve  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$ ).



**Figure 13.** Comparaison simulation-expérience en mode mixte : déformation à l'initiation et interface délaminée

A la vue des confrontations simulations et essais, on peut constater :

- sur le plan quantitatif, l'approche simplifiée permet de déterminer avec un niveau d'erreur raisonnable la déformation à laquelle se produit l'initiation du délaminage.

- sur le plan qualitatif, l'approche proposée permet de détecter l'interface délaminée et permet de décrire l'effet d'épaisseur (la sensibilité au délaminage augmente lorsque l'épaisseur des couches croît).

La réponse post-initiation présente une diminution de la déformation lorsque la longueur de fissure augmente sur une courte distance (voir Figure 5). Ainsi pour une

déformation imposée croissante, l'initiation du délaminage présentera un caractère instable. D'un point de vue expérimental, ce phénomène se traduira par une chute de raideur brutale de l'éprouvette. Certains auteurs utilisent ce phénomène comme indicateur d'initiation du délaminage [KIM 84] [LAG 88].

#### 4.3.2. Analyse d'un délaminage existant - Comparaison avec la Mécanique de la Rupture

Nous nous intéressons maintenant à la propagation d'une fissure établie sur l'interface centrale d'un stratifié T300-5208 ( $\pm 45_n, 0_n, 90_n$ )<sub>s</sub> soumis à de la tension. Le délaminage se produit alors en mode I. Les données (épaisseur du pli, constantes élastiques) et les paramètres caractéristiques du modèle d'endommagement sont ceux utilisés en 4.3.1, c'est-à-dire sans fissure initiale.

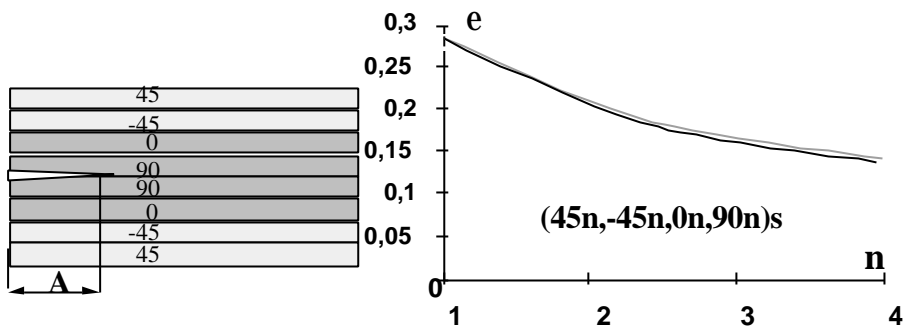
La fissure est modélisée par un endommagement initial,  $d_i = 0$  ( $i=1,2,3$ ) sur une longueur  $A = 4 \infty e_C$  depuis le bord libre. La structure est supposée saine partout ailleurs. Nous calculons dans un premier temps, la déformation  $\epsilon_{Erreur !}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). Cette déformation correspond à la déformation à laquelle la fissure va se propager, calculée par la Mécanique de l'Endommagement.

Dans un second temps, nous calculons pour  $n = 1$  le taux de restitution d'énergie critique  $G_C$  (supposé être un paramètre intrinsèque de l'interface) par l'application de la Mécanique de la Rupture et à partir de la déformation  $\epsilon_{Erreur !}$  ( $n = 1$ ).

$$G_C = G(\epsilon_{Erreur !})$$

Enfin, les déformations  $\epsilon_{Erreur !}$ , seuils de délaminage pour  $n = 2, 3, 4$ , sont calculés par l'application du critère précédent et d'un calcul élastique du taux de restitution d'énergie.

Les résultats des deux approches sont extrêmement proches (voir Figure 14). Notons que l'on peut là encore constater un effet "d'épaisseur" mis en évidence par de nombreux auteurs et qui peut donc s'expliquer par un effet de structure.



**Figure 14.** Propagation du délaminage : Comparaison Mécanique de la Rupture - Mécanique de l'Endommagement

## 5. Conclusion

Une approche pour l'analyse du délaminage par la Mécanique de l'Endommagement auprès du bord d'une structure composite a été présentée. Les hypothèses de base de cette méthode - le bord est quasi-droit - l'endommagement est concentré sur les interfaces entre les couches - font de cette approche, une méthode simplifiée utilisable dans les bureaux d'études.

L'identification des paramètres caractéristiques du modèle d'interface proposé peut être effectuée en exploitant les résultats d'essais classiques de la Mécanique de la Rupture et par l'étude de l'initiation du délaminage auprès du bord libre d'une éprouvette en tension ou compression. Une identification plus complète des paramètres caractéristiques du modèle d'interface est en cours.

Le logiciel Éléments Finis EDA qui a été réalisé est indépendant de tout code de calcul. Il intervient en post-processeur d'un calcul élastique d'une coque stratifiée. Les premières comparaisons des simulations numériques avec des résultats expérimentaux sont satisfaisantes.

Notons que il n'y a pas dans ce cas de non objectivité du résultat par rapport au maillage. En effet, le modèle d'endommagement relatif à l'interface contient une longueur caractéristique qui définit la taille de la zone endommagée. Pour des problèmes non plans, des modèles avec retard sont introduits [LAD 92a].

## 6. Bibliographie

- [ALL 88] ALLEN D.H., GROVES S.E. & HARRIS C.E., A Cumulative Damage Model for Continuous Fiber Composite Laminates with Matrix Cracking and Interply Delaminations, *Composite Materials : Testing and Design*, WITHCOMB J.D. (Ed.), ASTM-STP 972 (1988) 57-80
- [ALL 92] ALLIX O. & LADEVEZE P., Interlaminar Interface Modelling for the Prediction of Delamination, *Composite Structures*, **22** (1992) 235-242
- [BAR 83] BAR-YOSEPH P., On the Accuracy of Interlaminar Stress Calculation in Laminated Plates, *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, **36** (1983) 309-329
- [CRI 83] CRISFIELD M.A., An Arc-length Method Including Line Searches and Accelerations, *Int. Journal for Num. Methods in Eng*, **19** (1983) 1269-1289
- [DAU 90] DAUDEVILLE L., Une Nouvelle Approche du Délaminage des Composites Stratifiés, *Comptes Rendus des 7<sup>e</sup> Journées Nationales sur les Composites JNC-7*, FANTOZZI G. & FLEISCHMANN P. (Ed), AMAC (1990) 599-607
- [DUM 86] DUMONTET H., Study of a Boundary Layer Problem in Elastic Composite Materials, *M<sup>2</sup>AN*, **20** (1986) 265-286
- [ENG 81] ENGRAND D., A Boundary Layer Approach to the Calculation of Transverse Stresses along the Free Edges of a Symmetric Laminated Plate of Arbitrary Width under in Plane Loading, *Composite Structures*, (1981) 247-261
- [FRI 61] FRIEDRICHS K.O. & DRESSLER R.F., A Boundary Layer Theory for Elastic Plates, *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, **14** (1961) 1-33
- [KIM 84] KIM R.Y. & SONI S.R., Experimental and Analytical Studies on the Onset of Delamination in Laminated Composites, *Journal of Composite Materials*, **18** (1984) 70-76
- [KIM 86] KIM R.Y. & SONI S.R., Delamination of Composite Laminates Stimulated by Interlaminar Shear, ASTM-STP 893, (1986) 286-307
- [LAD 88] LADEVEZE P., Les modèles classiques et leurs extensions pour le calcul des plaques, *Calcul des structures et intelligence artificielle*, FOUET, LADEVEZE & OHAYON (Ed.), Pluralis, **4** [1988] 99-118
- [LAD 90] LADEVEZE P., ALLIX O. & DAUDEVILLE L., Mesomodeling of Damage for Laminate Composites : Application to Delamination, IUTAM Symposium on Inelastic Deformation of Composites Materials, Troy, DVORAK G.J. (Ed.), Springer-Verlag (1990) 607-622



- [LAD 92a] LADEVEZE P., Towards a Fracture Theory, Proc. 3rd Int. Conf. on Computational Plasticity Part II, OWEN P.J., ONATE E. & HINTON E. (Ed.), Pineridge press, (1992) 1369-1400
- [LAD 92b] LADEVEZE P. & LE DANTEC E., Damage Modelling of the elementary ply for laminated composites, *Composites Science and Technology*, **43** (1992) 257-267
- [LAG 88] LAGACE P.A. & BREWER J.C., Quadratic stress criterion for initiation of delamination, *Journal of Composite Materials*, **22** (1988) 1141-1155
- [LAK 91] LAKSIMI A., BENZEGGAGH M.L., JING G., HECINI M. & ROELANDT J.M., Mode I Interlaminar Fracture of Symmetrical Cross-ply Composites, *Composites Science and Technology*, **41** (1991) 147-164
- [LEN 81] LENE F., LEGUILLON D., Etude de l'influence d'un glissement entre les constituants d'un matériau composite sur ses coefficients de comportement effectifs, *Journal de Mécanique*, **20** [1981] 509-536
- [OBR 82] O'BRIEN T.K., Characterization of Delamination Onset and Growth in a Composite Laminate, Damage in Composite Materials, REIFSNIDER K.L. (Ed.), ASTM-STP 775 (1982) 140-167
- [PIP 70] PIPES R.B. & PAGANO N.J., Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Axial Extension, *Journal of Composite Materials*, **4** (1970) 538-548
- [RIK 79] RIKS E., An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling problems, *International Journal of Solids and Structures*, **15** (1979) 524-551
- [ROD 78] RODINI B.T. & EISENMAN J.R., An analytical and Experimental Investigation of Edge Delamination in Composite Laminates, Proc. 4th Conf. Fibrous Comp. San Diego, Lenoe & OPLINGER & BURKE (Ed.), (1978) 441-457
- [SCH 91] SCHELLEKENS J.C.J. & DE BORST R., Numerical Simulation of Free Edge Delamination in Graphite Epoxy Specimen under Uniaxial Extension, Sixth International Conf. on Composite Structures ICCS6, Paisley, MARSHALL I.H. (Ed.), Elsevier Science Publishers (1991) 647-657
- [SEL 89] SELA N. & ISHAI O., Interlaminar Fracture Toughness and Toughening of Laminated Composite Materials : A Review, *Composites*, **20** (1989) 423-435
- [TAL 89] TALREJA R., Damage Development in Composites : Mechanisms and Modelling, *Journal of Strain Analysis*, **24** (1989) 215-222

- [TSA 71] TSAI S.W. & WU E., A General Theory of Strength for Anisotropic Materials, *Journal of Composite Materials*, **5** (1971) 58-80
- [WAN 85] WANG A.S.D., SLOMANIA M. & BUCINELL R.B., Delamination Crack Growth in Composite Laminates, Delamination and Debonding of Materials, JOHNSON W.S. (Ed.), ASTM STP 876 (1985) 135-167
- [WAN 89] WANG A.S.D., Fracture Analysis of Interlaminar Cracking, *Interlaminar Response of Composite Materials*, Composite Material Series, PAGANO N.J. (Ed), Elsevier Science Publishers, **5** (1989) 69-109
- [WHI 89] WHITNEY J.M., Experimental Characterization of Delamination Fracture, Interlaminar Response of Composite Materials, Composite Material Series, PAGANO N.J. (Ed), Elsevier Science Publishers, **5** (1989) 161-250