

---

# Modélisation du Comportement Dynamique du Béton par la Méthode des Eléments Discrets

Sébastien Hentz — Laurent Daudeville — Frédéric-Victor Donzé

Laboratoire Laboratoire Sols, Solides, Structures

Domaine Universitaire B.P. 53

38041 Grenoble Cedex 9

{Sebastien.Hentz,Laurent.Daudeville,Frederic.Donze}@inpg.fr

---

*RÉSUMÉ.* L'utilisation d'une Méthode Eléments Discrets 3D est proposée pour étudier les structures en béton soumises à des chocs. Le modèle a déjà été validé au travers de simulations quasi-statiques et de simulations d'essais de compression dynamiques, ayant permis de confirmer l'hypothèse inertielle pour expliquer l'effet de vitesse aux hauts taux de déformation. Le but de ce travail est d'abord d'étendre la validation du modèle à la traction dynamique en simulant des essais de traction aux barres d'Hopkinson, et ensuite de contribuer à la compréhension des mécanismes physiques mis en jeu. Une fois l'identification correcte des paramètres du modèle, des essais de traction dynamique sont simulés et les résultats montrent que l'effet de vitesse à ces taux de déformation seraient un effet matériau. Une loi de dépendance locale au taux de déformation est donc introduite, montrant une grande aptitude à reproduire l'effet de vitesse expérimentalement observé.

*ABSTRACT.* The use of a 3D Discrete Element Method (DEM) is proposed to study concrete structures submitted to dynamic loading. The model has already been validated through quasi-static simulations. This paper aims first at extending the validation of the model through the simulation of SHPB tests at high strain rates, and at contributing to the understanding of the physical mechanisms in stake. Once the correct identification of the model parameters is done, compressive dynamic tests are first simulated. The model proves able to reproduce the concrete strain rate dependency, and confirms the inertia-based hypothesis at high strain rates. Then dynamic tensile tests are simulated, and the results tend to show that the strain rate effect in tension is a material one. A local rate dependence is then introduced in the model, which proves to reproduce accurately the experimental rate sensitivity.

*MOTS-CLÉS :* Méthode Eléments Discrets, béton, dynamique rapide, effet de vitesse

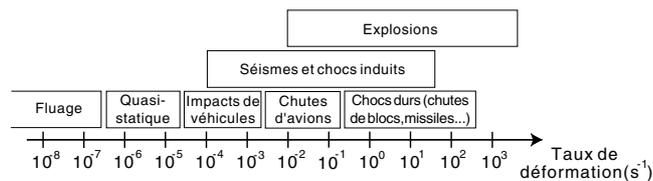
*KEYWORDS:* Distinct Element Method, concrete, high strain rates, dynamic, strain rate dependency

---

## 1. Introduction

Le dimensionnement de structures de protection en béton est un grand défi pour les ingénieurs : Certaines structures en zone de montagne par exemple sont destinées à la protection contre les risques naturels, comme les avalanches, les chutes de blocs, etc ... et peuvent être ainsi soumises à des impacts et à de grandes déformations. Malgré leur géométrie usuellement massive, un fort taux de ferrailage et un dimensionnement satisfaisant les codes de dimensionnement, il arrive que certaines d'entre elles soient totalement détruites par un événement naturel. Cette incohérence nécessite parfois l'utilisation de modèles permettant la prédiction des dommages du béton sous chargement dynamique rapide, car à ces vitesses de sollicitation, des calculs statiques, même pondérés par des coefficients partiels de sécurité, ne paraissent pas réalistes.

De nombreuses structures sont susceptibles d'être soumises à des chargements dynamiques, dans une large gamme de taux de déformation (voir figure 1) ; ainsi le comportement dynamique du béton a été très largement étudié. La compréhension de l'important effet de vitesse observé dans le béton a été l'objet de nombreux travaux expérimentaux et numériques.



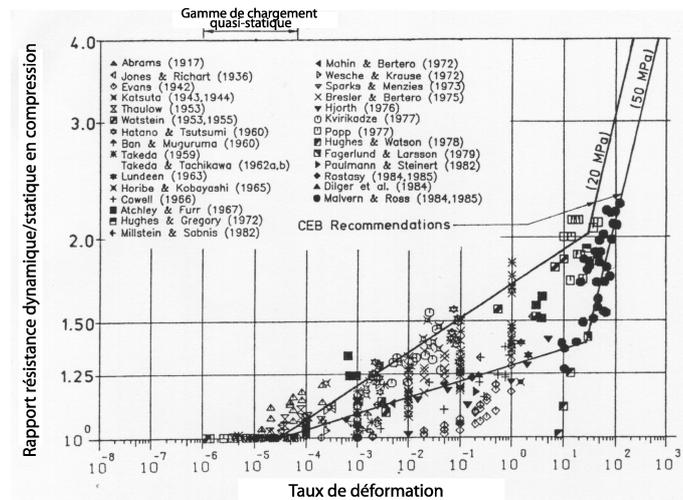
**Figure 1.** *Gammes de taux de déformation, [BIS 91] et [BRA 99]*

### 1.1. Résultats expérimentaux

Différents types de machine ont été utilisés pour explorer une large gamme de taux de déformation ([GOP 96]) et ([BIS 91]). Des essais de compression et de traction directe ont été réalisés, en quasi-statique et jusqu'à des taux de déformation de l'ordre de  $10^{-1} s^{-1}$  avec des machines de traction-compression hydrauliques classiques, dont les capacités, en terme de contrôle et de raideur, sont limitées ([BIS 91]). Des essais Charpy ont été communément réalisés et des résultats significatifs ont été montrés, jusqu'à des taux de  $10^0 s^{-1}$ . Principalement qualitatif, ce dispositif a été grandement amélioré grâce notamment à une meilleure instrumentation ([GOP 96]), mais des difficultés résident pour l'acquisition des données à haut taux de déformation. Des essais de "Drop Weight" permettent d'atteindre  $10^1 s^{-1}$ , mais l'énergie transmise à l'échantillon est limitée par la taille du dispositif : des poids de 50 à 100 kg sont lâchés à des hauteurs de 2 à 6m. Des taux de déformation supérieurs, jusqu'à plus de  $10^2 s^{-1}$ , sont obtenus en traction et compression, grâce aux barres d'Hopkinson, dispositif couramment utilisé grâce à l'apparition d'une procédure de dépouillement des données

autorisant une grande précision ([GAR 96]). Des taux de déformation encore plus importants ( $\dot{\epsilon} \geq 10^3 s^{-1}$ ) peuvent être obtenus grâce à l'utilisation de charges explosives.

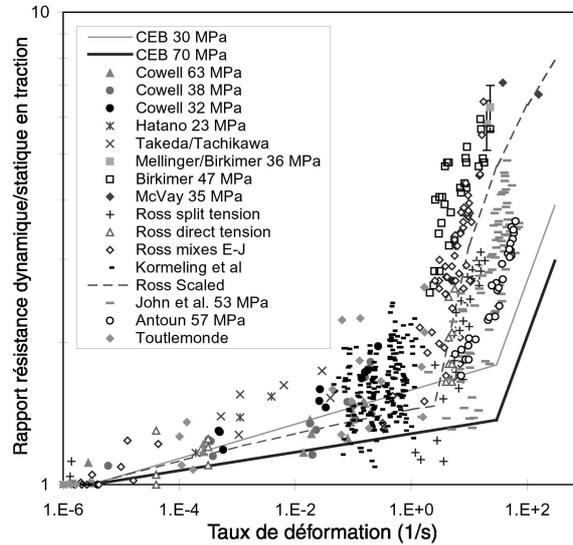
L'effet de vitesse a été étudié sur différentes caractéristiques du béton : le module d'Young, le coefficient de Poisson, l'énergie absorbée et la déformation ultime sont autant de quantités dépendantes du taux de déformation, mais dans une bien moindre mesure que les résistances en compression et en traction ([BIS 95], [TOU 95] et [TOU 94]).



**Figure 2.** Dépendance de la résistance en compression au taux de déformation, [BIS 91]

Les figures 2 et 3 montrent une partie des résultats significatifs de la littérature, en terme de rapport résistance dynamique sur résistance statique, appelé rapport dynamique. On observe deux comportements différents : le premier montre une dépendance quasi-linéaire du rapport dynamique avec  $\log(\dot{\epsilon})$ . Le deuxième est une augmentation brutale de ce rapport. La limite entre les deux se situe aux environs de  $\dot{\epsilon} \simeq 3 \cdot 10^1 s^{-1}$  en compression et autour de  $\dot{\epsilon} \simeq 10^0 s^{-1}$  en traction.

Pour comprendre l'effet de vitesse, il est important d'être capable de répondre à la question suivante : est-ce un effet intrinsèque au matériau béton, ou est-ce plutôt un effet de structure (l'état de contrainte et de déformation n'étant pas homogène dans l'échantillon)? Pour ce faire, il est nécessaire d'étudier quelques résultats concernant l'influence de différents paramètres sur le rapport dynamique : le rapport  $\frac{eau}{ciment} = \frac{e}{c}$  ([GOP 96], [BIS 95], [TOU 95], [TOU 94]), conditions limites ([BIS 91]) et la présence d'eau libre ([ROS 94], [TOU 95], [TOU 94]). Il apparaît en premier lieu que  $\frac{e}{c}$  et conditions limites sont des paramètres secondaires n'ayant que peu d'influence (néanmoins, l'augmentation de résistance en dynamique est plus importante pour les bétons de moindre résistance). De plus, le rapport dynamique semble plus sensible au taux de déformation en traction qu'en compression ([MAL 98]). D'autre part, il



**Figure 3.** *Dépendance de la résistance en traction au taux de déformation, [MAL 98]*

semble maintenant clair que l'effet de vitesse, en tout cas lorsque  $\dot{\epsilon} \leq 10^1 s^{-1}$ , est expliqué par la présence d'eau libre dans le béton, entraînant un effet similaire à l'effet Stefan ([ROS 94]). Pour de plus hauts taux de déformation et en compression, [JAN 76] a proposé l'hypothèse selon laquelle l'effet Poisson associé à l'inertie était responsable de l'augmentation de la capacité de charge de l'échantillon, en en faisant donc un effet de structure. L'aide de modèles numériques performants sont nécessaires à la confirmation ou l'infirmité de cette hypothèse inertielle.

## 1.2. Modélisation

Les nombreux et différents modèles conçus pour modéliser le matériau béton ou d'autres géomatériaux peuvent être classés en trois catégories, chacune d'entre elle pouvant être associée à une classe de chargement ([GAR 98]) : la première correspond à un chargement uniaxial prépondérant, où la micro-fissuration est le principal mécanisme physique. La deuxième concerne des chargements fortement multi-axiaux, où un écoulement plastique se produit. La troisième concerne des chargements à haute pression, où de la compaction apparaît et où usuellement, l'effet de vitesse est négligé.

Nous ignorerons les deux dernières classes de modèle, considérant que l'état de contrainte des structures soumises à un chargement dynamique aux taux de déformations considérés ici est fortement déviatorique. Dans ce domaine, le béton a été très largement modélisé, principalement par des modèles élasto-plastiques, à loi d'écoulement associée ou non. La fissuration peut être prise en compte grâce à des "smeared

cracked models”, qui introduisent une perte de rigidité dans la direction perpendiculaire à la direction de la contrainte de traction maximum ([THA 01]), ou grâce à des modèles d’endommagement ([MAZ 84], [BUR 00]). Dans le cas dynamique, les modèles diffèrent en particulier dans la façon de représenter l’effet de vitesse.

Certains auteurs ([BIS 91]) introduisent de la viscosité. D’autres ([GAR 98]) introduisent de la viscosité couplée à de l’inertie, l’un des deux effets devenant prépondérant selon le taux de déformation. Certains modèles micromécaniques considèrent que la croissance d’une fissure est thermo-activée, ([GOP 96]), introduisant une énergie d’activation, ou un temps caractéristique, ([KLE 90]). Ceci mène au type de relation suivant :  $\sigma_d \propto \dot{\varepsilon}^n$ . où  $\sigma_d$  est la résistance. C’est aussi le cas de la formulation du CEB, ([CEB93]), basée sur des résultats expérimentaux comme sur des modèles analytiques, et dont l’utilisation lors d’analyses numériques est directe : les seuils de résistance utilisés dans les codes peuvent être directement ceux de la formulation CEB. Cette dernière prend en compte la plupart des observations expérimentales décrites dans le chapitre précédent (Voir figures 2 et 3). Ce modèle sera commenté ultérieurement.

Certaines précautions sont à prendre quant à l’implantation numérique des modèles sus-cités, leur comportement adoucissant pouvant entraîner la perte d’objectivité de l’analyse vis-à-vis du maillage dans des problèmes dynamiques. Ce problème peut être résolu grâce à l’utilisation de différentes techniques de régularisation, comme le “crack band model” ([BAZ 83]), les milieux de Cosserat ([DEB 90]), ou l’approche non-locale ([PIJ 93]).

La complexité croissante de ces modèles, associée aux difficultés des problèmes dynamiques, en rend leur emploi lors d’analyses numériques délicat, que ce soit en terme d’implantation, de convergence ou simplement de coût. En particulier, un départ de fissuration doit être identifié et des mécanismes physiques comme le frottement interne après ouverture de fissure ou des effets structuraux comme l’inertie ou des micro-fissurations doivent être explicitement pris en compte.

L’utilisation de la Méthode aux Eléments Discrets ([CUN 79], [CUN 88]) est une alternative aux calculs Eléments Finis. Cette méthode ne repose sur aucune hypothèse postulant où et comment une ou plusieurs fissures se produisent et se propagent, puisque le milieu est naturellement discontinu et est très adaptée aux problèmes dynamiques. Bien que de nombreux auteurs comme [POT 96] et [MEG 89] ont utilisé des approches bidimensionnelles similaires pour modéliser des géomatériaux cohésifs, peu ont ainsi modélisé le béton ([CAM 99], [CAM 00]), et encore moins nombreux sont ceux qui ont modélisé des structures 3D complètes, ce qui est maintenant rendu possible grâce aux progrès rapides et constants de l’informatique.

Le but de ce travail est double : Gardant à l’esprit que l’objectif final est de modéliser une structure 3D en béton armé, ce travail cherche à étendre la validation d’un modèle Elément Discret tridimensionnel grâce à la simulation d’essais de traction aux barres d’Hopkinson à haut taux de déformation et à la compréhension des principes physiques mis en jeu. Le modèle ED a été décrit en détail et validé en quasi-statique et en compression dynamique dans [HEN 02]. Cette première étude a permis de confir-

mer l'hypothèse inertielle pour expliquer l'effet de vitesse du béton en compression ; en effet, le modèle est capable de reproduire cet effet de vitesse sans nécessiter l'introduction de viscosité, ou de temps caractéristique : en d'autres termes, il semble qu'à ces taux de déformation élevés, l'effet de vitesse est un effet de structure ; on peut noter que ceci n'est pas en accord avec le CEB, qui propose une augmentation de la résistance "matériau" avec la vitesse. Fort de ces résultats, ce travail rappelle brièvement le modèle ED, avant de présenter la simulation d'essais de traction dynamique, et l'exploration de l'effet de vitesse en traction.

## 2. Modèle Élément Discret utilisé

Il est important que le modèle soit capable de reproduire en particulier deux points du comportement du béton et ce, avec un coût de calcul minimum :

- 1) Le comportement du béton sain est linéaire, élastique, isotrope et homogène.
- 2) Le comportement non-linéaire du béton est plus proche de celui d'un milieu non poreux que d'un matériau granulaire.

Ici, le modèle a été implanté dans le code SDEC "Spherical Discrete Element Code" ([DON 00]). Il utilise des éléments discrets sphériques, ayant chacun une masse et un rayon propre, permettant une gestion rapide et triviale des contacts. La distribution des directions des contacts doit être la plus homogène possible pour satisfaire la première condition et l'échantillon numérique doit être le plus compact possible pour satisfaire la seconde. Ceci est obtenu grâce à une technique de désordre particulière, (basée sur un algorithme décrit dans [JOD 85], voir [DON 02]), qui donne un assemblage polydisperse avec une certaine distribution de tailles. Une fois l'échantillon numérique obtenu, des paires d'éléments discrets initialement en interaction sont identifiées. Ces interactions ont été choisies pour représenter le mieux possible et de façon simple, la nature élastique et cohésive du béton. Pour ce faire, des forces élastiques associées à un critère de rupture local sont appliquées entre deux éléments en interaction.

Les lois de comportement locales permettent de déduire les efforts interparticulaires à partir des déplacements relatifs. L'intégration explicite des équations de la dynamique fournit les nouveaux déplacements et vitesses des éléments.

Au cours de la simulation, des réarrangements dans l'assemblage des éléments peuvent se produire et de nouvelles interactions peuvent être créées. Le modèle est donc capable de déterminer les voisins en interaction avec un élément donné. Ceci est réalisé en identifiant les éléments susceptibles d'interagir, inclus dans une zone définie par un certain rayon d'interaction.

### 2.1. Rayon d'interaction

Le comportement global d'un matériau peut être reproduit par ce modèle en associant à chaque interaction une loi de comportement simple. Une interaction entre les

éléments  $a$  et  $b$  de rayons  $R^a$  et  $R^b$  respectivement, est définie dans un rayon d'interaction  $\gamma$  et n'implique pas nécessairement que les éléments sont en contact : les éléments  $a$  et  $b$  interagissent si

$$\gamma(R^a + R^b) \geq D^{a,b} \quad [1]$$

où  $D^{a,b}$  est la distance entre les centres des éléments  $a$  et  $b$  et  $\gamma \geq 1$ . Ce point est une différence importante avec les modèles aux Eléments Discrets classiques qui utilisent des éléments sphériques ([CUN 79]) où seuls les interactions de contact sont considérées ( $\gamma = 1$ ). Cette solution a été adoptée afin que le modèle soit capable de simuler d'autres matériaux que de simples matériaux granulaires, en particulier des matériaux comprenant une matrice comme les bétons.

## 2.2. Forces d'interaction

Le vecteur force d'interaction  $\mathbf{F}$  qui représente l'action de l'élément  $a$  sur l'élément  $b$  peut être décomposé en une composante normale  $\mathbf{F}^n$  et une composante tangentielle  $\mathbf{F}^s$  telles que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^n + \mathbf{F}^s \quad [2]$$

Les efforts normaux et tangentiels peuvent être classiquement déduits des déplacements relatifs, grâce à des raideurs normales et tangentielles,  $K^n$  et  $K^s$ .

Le vector force d'interaction total  $\mathbf{F}$  peut aussi être écrit  $\mathbf{F}^{a,k}$  pour l'interaction entre les éléments  $a$  et  $b$  si cette interaction est la  $k^{eme}$  interaction pour l'élément  $a$ . Une fois celui-ci calculé, toutes les autres interactions de l'élément  $a$  sont maintenant considérées et la résultante des efforts est calculée. Ainsi, l'effort total agissant sur l'élément  $a$  est la somme des  $n$  efforts d'interactions et de tous les  $l$  autres efforts (gravité, conditions limites ...) tel que :

$$\mathbf{F}^a = (-1) \left( \sum_{k=1}^n \mathbf{F}^{a,k} \right) + \sum_{j=1}^l \mathbf{F}^j. \quad [3]$$

De même, le moment total agissant sur l'élément  $a$  est

$$\mathbf{M}^a = (-1) \left( \sum_{k=1}^n [(\mathbf{x}^{a,k} - \mathbf{x}^a) \times \mathbf{F}^k] \right). \quad [4]$$

### 2.3. Propriétés élastiques

L'énergie de déformation stockée dans une interaction donnée ne peut être supposée indépendante de la taille des éléments impliqués. C'est pourquoi les raideurs d'interaction ne sont pas homogènes dans l'échantillon, mais suivent une certaine distribution, ce qui est une autre particularité importante du modèle SDEC. Les propriétés élastiques macroscopiques, c'est-à-dire le coefficient de Poisson  $\nu$  ainsi que le module d'Young  $E$  sont considérés comme **des paramètres d'entrée du modèle**.

Des relations "macro-micro" sont donc nécessaires pour déduire les valeurs des raideurs locales des propriétés élastiques macroscopiques et de la taille des éléments en interaction. Des essais de compression uniaxiale ont été simulés avec un échantillon donné et ont permis de tracer les courbes du coefficient de Poisson  $\nu$  et du module d'Young  $E$  en fonction de la quantité adimensionnelle  $\frac{K^s}{K^n}$ . Pour ajuster ces courbes, des relations basées sur le "best-fit model" ([LIA 97]) ont été utilisées. Ce sont ces relations qui sont utilisées pour affecter aux raideurs d'interaction leur valeur.

### 2.4. Comportement inélastique

#### 2.4.1. Avant rupture

Pour simuler le comportement de géomatériaux comme les roches et les bétons, un critère de Mohr-Coulomb modifié est utilisé. Ainsi, pour une interaction donnée, une résistance en traction locale  $T$  (avec  $T > 0$ ) est définie, ainsi qu'une force normale maximum  $F_{\max}^n$ , telles que

$$F_{\max}^n = -T \tilde{A}_{int} \quad [5]$$

ou  $\tilde{A}_{int}$  est la surface d'interaction, avec

$$\tilde{A}_{int} = \pi \cdot \min(R^a, R^b)^2. \quad [6]$$

La force tangentielle maximum peut être déduite de

$$F_{\max}^s = c \tilde{A}_{int} + F^n \tan \phi_i, \quad [7]$$

où  $c$  est la cohésion et  $\phi_i$  est l'angle de frottement "interne". Si la valeur absolue de l'effort tangentiel

$$|F^s| = (\mathbf{F}^s \cdot \mathbf{F}^s)^{1/2} \quad [8]$$

est supérieure à  $|F_{\max}^s|$ , alors l'effort tangentiel est réduit à la valeur limite suivante :

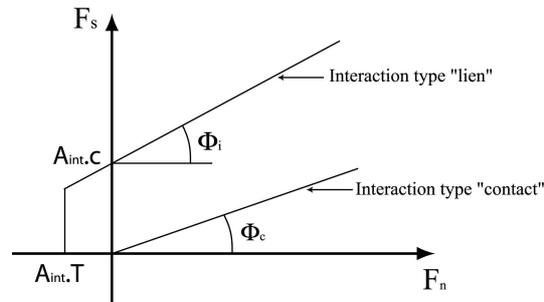
$$\mathbf{F}_{reduite}^s = \mathbf{F}^s [F_{max}^s / |F^s|] . \quad [9]$$

Finalement, le modèle est très cohérent avec le comportement du béton : la rupture est entraînée par la coalescence de micro-fissures en traction.

#### 2.4.2. Après rupture

Après la rupture d'interactions initiales, de nouvelles sont créées ; ces nouvelles interactions ne sont plus cohésives et sont seulement des interactions de "contact", ne pouvant plus supporter aucun effort de traction. Un critère de Coulomb classique est donc utilisé, avec un angle de frottement de "contact"  $\phi_c$ .

La figure 4 résume les critères de rupture utilisés par le modèle.



**Figure 4.** Critère de rupture utilisé dans le modèle

On peut noter que le modèle est enrichi par un adoucissement local caractérisé par un coefficient  $\beta$ , sans lequel le comportement macroscopique obtenu serait quelque peu trop fragile ( $\beta = 0$  signifie que la rupture d'une interaction est parfaitement fragile ;  $\beta > 0$  implique un adoucissement).

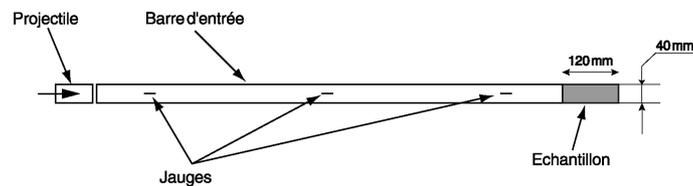
#### 2.5. Calibration des paramètres

La calibration des paramètres du modèle est nécessaire pour ajuster les propriétés du matériau représenté par l'échantillon d'éléments discrets aux propriétés du géomatériau réel, un certain béton. A cet effet, une procédure d'essais de compression/traction uniaxiale en quasi-statique a été établie et entièrement décrite dans [HEN 02]. Cette procédure permet de déterminer, pour un échantillon donné, les valeurs des paramètres locaux  $T$ ,  $\phi_i$ ,  $\phi_c$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  pour obtenir le comportement macroscopique caractérisé par le module d'Young, le coefficient de Poisson, les résistances en traction et compression, ainsi que l'énergie de rupture. En ce qui concerne les propriétés élastiques macroscopiques, il est apparu que les relations "macro-micro" décrites

au paragraphe 2.3 permettent seulement de les approcher, en grande partie à cause de l'aspect aléatoire de la génération de l'échantillon. Pour résoudre ce problème, la procédure est la suivante :

- 1) Un échantillon compacte et polydisperse d'éléments discrets est générée.
- 2) Un essai de compression élastique est simulé, avec les paramètres locaux donnés par les relations "macro-micro".
- 3) Une correction est appliquée, selon un critère en énergie.
- 4) Des essais à rupture en traction puis compression sont simulés afin de déterminer les paramètres locaux restants.

### 3. Traction dynamique : les essais aux barres d'Hopkinson



**Figure 5.** *Dispositif expérimental des essais de traction aux barres d'Hopkinson*

Initialement utilisée en compression ([ZHA 96]) et pour la caractérisation des métaux, la technique des barres d'Hopkinson (SHPB pour Split Hopkinson Pressure Bar) a été étendue à la traction et au béton. La figure 5 montre un schéma du dispositif expérimental utilisé : il est à noter qu'il n'y a qu'une barre d'entrée, contrairement à la compression. Un projectile impacte la barre d'entrée, donnant lieu à une vague de compression dans la barre d'entrée, qui se propage dans l'échantillon, puis se réfléchit en une onde de traction à son bord libre. Si la longueur d'onde du signal de chargement est plus grande que la longueur de l'échantillon, l'avant de l'impulsion est réfléchi en onde de traction et se superpose à sa propre partie arrière encore en propagation. L'addition des deux parties du signal donne lieu à une contrainte de traction au sein de l'échantillon, menant à la rupture si l'amplitude du signal est suffisante. Les paramètres de l'expérience sont : impédances acoustiques, sections et longueurs du projectile, de la barre et de l'échantillon, ainsi que la vitesse d'impact du projectile. Ils doivent être choisis tels que :

- 1) la longueur d'onde du signal de chargement est plus grande que la longueur de l'échantillon (idéalement deux fois sa longueur)
- 2) la barre peut être considérée infinie pour éviter les réflexions en traction à son bord libre
- 3) les dispersions radiales sont limitées
- 4) l'amplitude du signal de chargement n'atteint pas la résistance en compression de l'échantillon

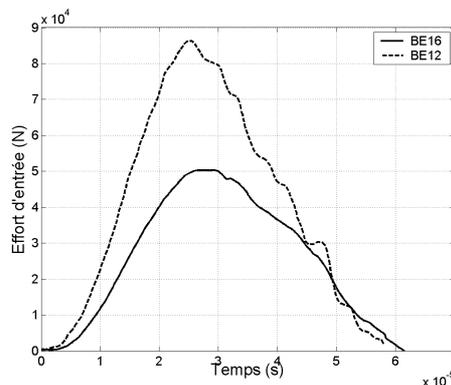
5) l'amplitude du signal de chargement est suffisante pour que le signal réfléchi atteigne la résistance en traction de l'échantillon

Pour une description complète, voir [BRA 99].

Des jauges collées sur la barre y enregistrent les ondes incidentes et réfléchies en propagation. Les données obtenues par ces jauges doivent être transportées en temps et en espace pour déduire les effort et vitesse au bord impacté de l'échantillon. Cette étape était anciennement réalisée sous l'hypothèse que la théorie de propagation unidimensionnelle des ondes décrit correctement la propagation d'onde dans la barre d'entrée, ce qui était à peu près vrai dans le cas du métal, dont les échantillons étaient de faible diamètre. Mais le béton, à cause de sa granulométrie, nécessite des échantillons et donc une barre d'entrée, de diamètre supérieur, favorisant les dispersions radiales. L'utilisation d'une technique de correction, proposée par [GAR 96], est donc nécessaire et permet d'obtenir des informations très précises à la face d'entrée de l'échantillon.

### 3.1. Les essais aux barres d'Hopkinson

Des essais de traction aux barres d'Hopkinson ont été menés par [BRA 99], [KLE 01] pour explorer des taux de déformations plus importants ( $20s^{-1} < \dot{\epsilon} < 130s^{-1}$ ) que ceux disponibles dans la littérature. Le béton testé a les caractéristiques suivantes : Module d'Young  $E = 35GPa$ , densité  $\rho = 2350kg.m^{-3}$ , résistance en compression  $\sigma_c = 42Mpa$  et résistance en traction  $\sigma_t = 4Mpa$ . Les contraintes déjà citées ont mené à l'utilisation de la géométrie suivante : le diamètre de l'échantillon est de 40mm, sa longueur de 120mm.



**Figure 6.** Données des essais de traction aux barres d'Hopkinson

Les données de deux essais, notés BE16 et BE12, sont disponibles. Le tableau 1 indique leurs caractéristiques. La figure 6 montre les efforts d'entrée pour les deux essais, seules données disponibles. La résistance dynamique, c'est-à-dire la valeur de la

contrainte axiale (en traction) lorsque la rupture se produit, peut être évaluée par deux moyens différents : le premier est la simulation de la propagation et la superposition des ondes, ce qui permet de déduire la contrainte à l'endroit et à l'instant (observés expérimentalement) de la rupture. Deuxièmement, des caméras ccd à ultra-haute vitesse ont été utilisées pour filmer les essais, ce qui permet d'évaluer la vitesse d'éjection du fragment de l'échantillon et d'en déduire la contrainte grâce à l'équation ([BRA 99])

$$\sigma_{td} = \rho C_0 V_e \quad [10]$$

où  $\sigma_{td}$  est la contrainte "dynamique",  $C_0$  est l'impédance acoustique et  $V_e$  est la vitesse relative des deux fragments de l'échantillon rompu. A noter que BE16, l'essai le plus lent, a mené à une seule rupture, alors que BE12, plus rapide, a mené à deux ruptures. Dans le cas de multi-ruptures, la première à apparaître est la seule à être considérée expérimentalement, en termes de contrainte de rupture et est due à la superposition de l'onde transmise et de l'onde de traction réfléchie. La seconde rupture, se produisant à une courte distance de la première (20/30mm) et quasiment au même moment (à environ 10 $\mu$ s d'intervalle), est probablement due à un paquet d'ondes courtes provoquées par la première rupture.

Test N°	$V_0$ ( $m.s^{-1}$ )	$\dot{\epsilon}$ ( $s^{-1}$ )	$\sigma_{td}$ (MPa)	$Z_c$ (mm)
BE16	7.5	35.9	19.2	65.8
BE12	15	70.4	33.5	Première : 69, seconde : 41

**Tableau 1.** *Caractéristiques des essais : Vitesse d'impact  $V_0$ , Taux de déformation  $\dot{\epsilon}$ , Contrainte à rupture  $\sigma_{td}$  et distance de rupture à partir du bord libre  $Z_c$*

### 3.1.1. Simulation numérique

Les échantillons numériques sont aussi proches de la géométrie réelle que possible, avec 8000 éléments, de tailles variant entre 1.5 et 6.5mm. Les valeurs des paramètres locaux ont été établis grâce à la procédure quasi-statique présentée précédemment (voir paragraphe 2.3 ou [HEN 02]) pour obtenir le comportement quasi-statique macroscopique. Les paramètres locaux sont listés dans le tableau 2.

Les efforts d'entrée expérimentaux sont appliqués aux éléments discrets compris dans une bande d'une certaine épaisseur, du côté impacté de l'échantillon, proportionnellement à leur taille.

Ce protocole a conduit à certaines difficultés : il est tout d'abord apparu que la simulation contrôlée en effort était très délicate à réaliser ; les éléments soumis à l'effort d'entrée montraient de violents déplacements, entraînant un endommagement précoce dans cette zone. De plus, la large distribution de tailles utilisée impliquait une non moins large distribution des seuils de résistance en traction au sein de l'échantillon, (avec en particulier des éléments de grande taille concentrant la micro-fissuration autour d'eux), ce qui conduisait à un endommagement trop diffus, empêchant la rupture.

Une autre distribution de tailles fut donc adoptée, de 1.5 à 4mm. Les efforts expérimentaux ont été convertis en vitesse grâce à l'équation 10, vitesse appliquée à

Paramètres	Valeurs
$\gamma$	1.23
$\alpha$	1
$\beta$	5
$T$ (MPa)	2.8
$c$ (MPa)	6.5
$\phi_i$ (degrés)	10
$\phi_c$ (degrés)	30

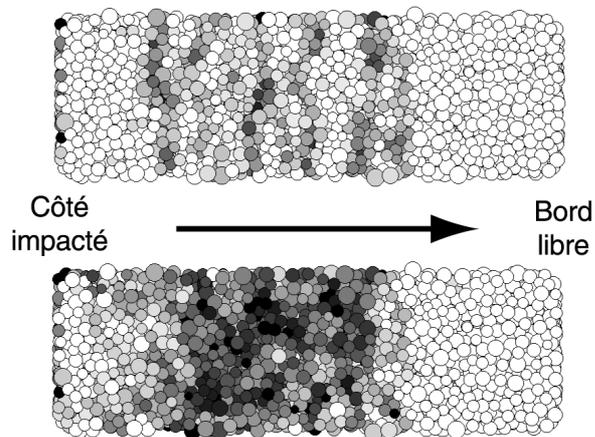
**Tableau 2.** Valeurs des paramètres locaux utilisés pour les essais de traction dynamique

l'échantillon par l'intermédiaire d'un plateau modélisant la face impactante de la barre d'entrée.

Les résultats numériques ont été comparés aux résultats expérimentaux en termes de nombre et de position des ruptures et de contrainte de rupture, calculée via à la fois une technique d'homogénéisation discrète et via la vitesse d'éjection.

Dans un premier temps, le comportement à rupture est supposé indépendant de la vitesse de sollicitation, tout comme lors de la simulation des essais dynamiques de compression, où cette hypothèse avait suffi à retrouver les résultats expérimentaux.

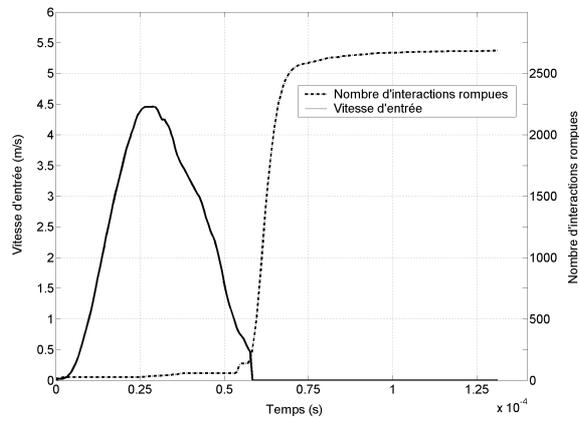
### 3.1.2. Resultats



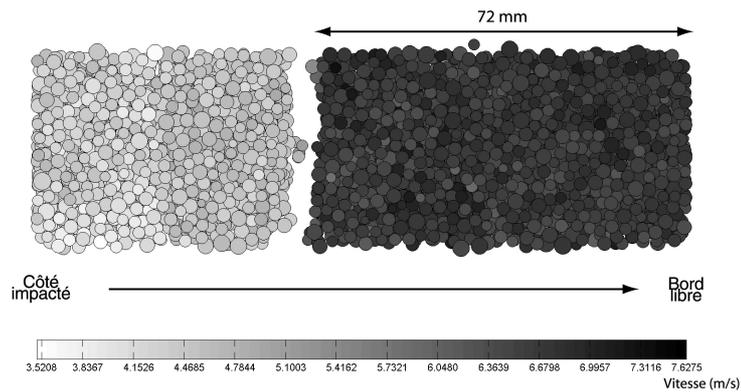
**Figure 7.** Champ d'endommagement pour : BE16 en haut, BE12 en bas.

La figure 7 montre l'état d'“endommagement” dans une coupe axiale de l'échantillon pour les deux essais et pour les valeurs des paramètres locaux identifiés en quasi-statique (l'endommagement est calculé par élément : il est égal au rapport du

nombre d'interactions rompues sur le nombre d'interactions initial. Sur cette figure, plus l'élément est sombre, plus son endommagement est important.). En particulier, la résistance en traction locale  $T$  est inchangée et est égale à 2.8MPa, sa valeur statique. Pour les deux essais, l'endommagement est relativement étendu dans l'échantillon et est significatif : l'échantillon est écrasé, la résistance du béton simulé est trop faible. A noter que les interactions cassent en nombre très tôt, bien avant que l'onde de compression ne se réfléchisse.

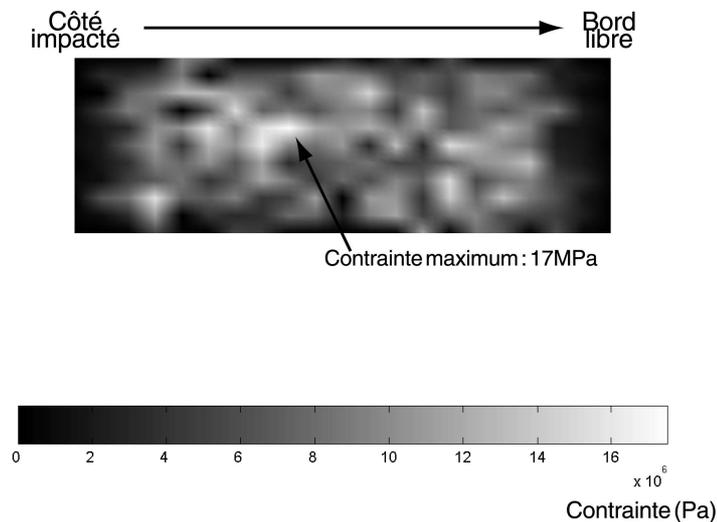


**Figure 8.** Essai BE16 : Vitesse d'entrée et nombre d'interactions rompues en fonction du temps



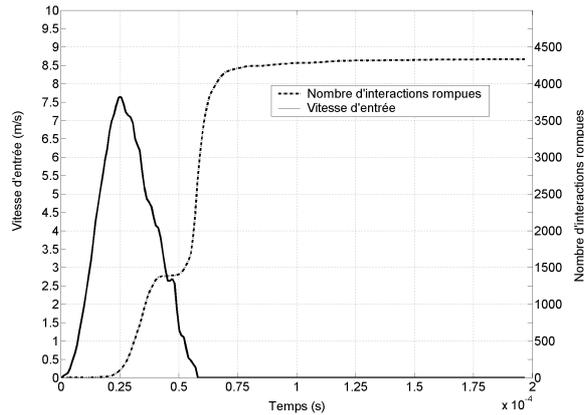
**Figure 9.** Essai BE16 : Champ des vitesses axiales dans l'échantillon à  $t = 3.28 \cdot 10^{-3} s$

La résistance en traction locale  $T$  a donc été artificiellement augmentée, jusqu'à ce que les résultats soient en correspondance avec les résultats expérimentaux de l'essai BE16. La figure 8 montre l'effort d'entrée et le nombre d'interactions rompues (28390 interactions ont été initialement créées) au cours de la simulation. La figure 9 montre le champ des vitesses axiales dans l'échantillon, à l'instant  $t = 3.28.10^{-3}s$  après l'impact, avec  $T = 4MPa$  et tous les autres paramètres locaux inchangés. Une rupture s'est produite, à l'instant  $t = 60.10^{-6}s$  et à la distance  $Zc = 72mm$  du bord libre de l'échantillon. Expérimentalement, la rupture s'est produite à  $Zc = 65.8mm$  du bord libre. La figure 10 montre l'état de contrainte homogénéisée dans une coupe axiale, à  $t = 60.10^{-6}s$ . Il peut être noté tout d'abord que cette contrainte est loin d'être homogène, même radialement ; l'hypothèse d'une propagation d'onde monodimensionnelle ne semble pas être adéquate, dans le cas d'un milieu discret, où la géométrie locale a une grande influence. Par ailleurs, cette figure permet de déduire la valeur de la contrainte de rupture à cet instant particulier :  $\sigma_{td} = 17MPa$ . La vitesse d'éjection (calculée juste après la rupture, c'est-à-dire à  $t = 79.1.10^{-6}s$ ) est égale à  $V_e = 2.3m.s^{-1}$ , ce qui donne une contrainte de rupture de  $\sigma_{td} = 20.8MPa$ . Ces résultats sont bien en accord avec les résultats expérimentaux, qui donnaient une contrainte  $\sigma_{td} \simeq 19MPa$ .



**Figure 10.** Essai BE16 : Champ des contraintes axiales dans l'échantillon à  $t = 60.10^{-6}s$

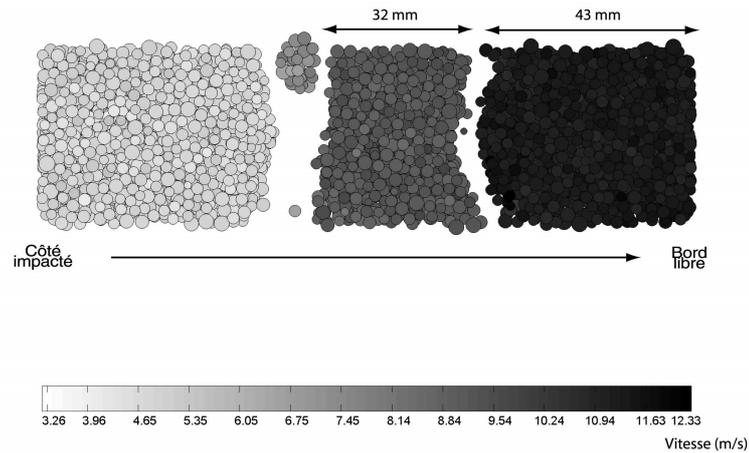
D'autre part, lorsque l'essai BE12 est simulé avec cette valeur de  $T = 4MPa$ , l'échantillon est de nouveau trop largement endommagé et la simulation d'un essai de traction quasi-statique montre une résistance macroscopique en traction de 6.4MPa.



**Figure 11.** Essai BE12 : Vitesse d'entrée et nombre d'interactions rompues en fonction du temps

De nouveau, la résistance locale en traction  $T$  a été augmentée, jusqu'à ce que les résultats soient en correspondance avec les résultats expérimentaux de l'essai BE12. La figure 11 montre l'effort d'entrée et le nombre d'interactions rompues au cours de la simulation. Figure 12 montre le champ des vitesses axiales au sein de l'échantillon, à l'instant  $t = 3.28.10^{-3}s$  après l'impact, avec  $T = 5.1MPa$ , et tous les autres paramètres locaux inchangés. Cette fois deux ruptures apparaissent, autour de l'instant  $t = 55.10^{-6}s$ , et aux distances  $Zc = 75mm$  et  $Zc = 43mm$  du bord libre. L'étude du champ des vitesses semble indiquer que la première rupture se produit à  $Zc = 75mm$  du bord libre. La contrainte homogénéisée calculée juste avant la rupture donne la même valeur de contrainte à rupture pour les deux ruptures,  $\sigma_{td} \simeq 23MPa$ , ce qui est plus bas que la contrainte expérimentale ( $\sigma_{td} = 33.5MPa$  pour la première rupture ; la seconde n'est pas considérée lors de l'expérience). Ceci est probablement dû à un instant de calcul de la contrainte mal adapté, étant donné que les deux ruptures se produisent à moins de  $10\mu s$  d'intervalle et se chevauchent dans le temps au moins en partie. D'autre part, les vitesses d'éjection sont respectivement  $V_e = 3.8m.s^{-1}$  et  $V_e = 2.2m.s^{-1}$ , donnant des contraintes à rupture  $\sigma_{td} = 35MPa$  et  $\sigma_{td} = 20MPa$ , ce qui est encore très en accord avec l'expérience.

Lors de la simulation de l'essai BE16 avec cette valeur de  $T$ , aucune rupture ne se produit et il apparaît seulement peu d'endommagement. La simulation d'un essai de traction quasi-statique montre une résistance macroscopique en traction de 8.2MPa.



**Figure 12.** Essai BE12 : Champ des vitesses axiales dans l'échantillon à  $t = 3.28 \cdot 10^{-3} s$

### 3.1.3. Interprétation

Ces résultats montrent que, contrairement aux essais de compression, le modèle, inchangé, se montre incapable de reproduire l'effet de vitesse du béton en traction. Néanmoins, ils conduisent à plusieurs conclusions : premièrement, l'inertie seule, intrinsèquement prise en compte dans le modèle, ne peut expliquer la dépendance au taux de déformation du béton en traction. Deuxièmement, l'augmentation artificielle de la résistance locale à la traction suffit à reproduire très correctement l'effet de vitesse, en termes d'augmentation de la résistance apparente à la traction, comme en termes de nombre, position et forme (quasi-plane ou en forme de ménisque) des ruptures. L'augmentation du taux de déformation ne semble pas changer en quoi que ce soit le comportement à rupture du béton et tout se passe comme si sa résistance en traction augmentait. Cela signifie que, plutôt qu'un effet de structure, l'effet de vitesse en traction semble être un effet matériau. Ainsi, il semble légitime d'introduire une dépendance locale au taux de déformation pour reproduire ce comportement macroscopique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### 3.2. Modélisation de l'effet de vitesse en traction

Si effectivement l'effet de vitesse en traction est un effet matériau, l'implantation locale d'une loi de la même forme que la dépendance macroscopique apparente devrait être adéquate. Une relation physique et simple entre la résistance dynamique et le taux de déformation a donc été recherchée. Comme aux hauts taux de déformation considérés, même un béton sec montre un effet de vitesse, mais dans une moindre mesure qu'un béton humide ([BRA 99]), la viscosité seule ne permet pas d'expliquer le comportement dynamique du béton. Il a donc été choisi d'utiliser une loi plus empirique, de la forme  $\sigma_d \propto \dot{\epsilon}^n$ . La formulation CEB est de cette forme et est basée en grande partie sur des résultats expérimentaux et sur des résultats analytiques : [GOP 96] et [KLE 90] ont trouvé des lois de la même forme, à partir d'hypothèses physiques. Par souci de simplicité, il a été décidé d'implanter une loi basée sur la formulation CEB, qui contrairement au cas de la compression, paraît cette fois adéquate.

#### 3.2.1. La formulation CEB

En traction (la formulation est différente en compression), l'effet de vitesse est donné par :

$$\frac{\sigma_{td}}{\sigma_{ts}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_{stat} \\ \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{stat}}\right)^{1.016\delta} & \text{si } \dot{\epsilon}_{stat} < \dot{\epsilon} \leq 30s^{-1} \\ \theta\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{stat}}\right)^{\frac{1}{3}} & \text{si } \dot{\epsilon} > 30s^{-1} \end{cases} \quad [11]$$

où  $\sigma_{td}$  est la résistance dynamique en traction à  $\dot{\epsilon}$ ,  $\sigma_{ts}$  est la résistance statique en traction à  $\dot{\epsilon}_{stat}$ ,  $\dot{\epsilon}$  est le taux de déformation entre  $3.10^{-6}$  et  $300s^{-1}$ , et

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{stat} &= 3.10^{-6} \\ \log(\theta) &= 7.11\delta - 2.33 \\ \delta &= \frac{1}{10+6\frac{\sigma_{cs}}{\sigma_{co}}} \\ \sigma_{co} &= 10MPa \end{aligned}$$

avec  $\sigma_{cs}$  la résistance statique en compression.

Ainsi la formulation prend en compte les propriétés suivantes : l'augmentation de résistance est reliée à une résistance mesurée à un taux de déformation quasi-statique spécifique, elle est plus importante pour des bétons de moindre résistance et sur un graphe  $\log\left(\frac{\sigma_{td}}{\sigma_{ts}}\right)$  en fonction de  $\log(\dot{\epsilon})$ , elle est bilinéaire avec un changement de pente autour de  $3.10^1s^{-1}$ . Néanmoins, après avoir effectué une revue des propriétés du béton sous chargement dynamique, [MAL 98] ont conclu que la formulation CEB était très en accord avec les résultats expérimentaux en compression, mais que c'était moins le cas en traction, et ont proposé une modification de la formulation. En particulier, le changement de pente modifié se situe à  $\dot{\epsilon} = 10^0s^{-1}$ , la pente de la première partie,  $\delta$ , est modifiée, ainsi que le taux de déformation quasi-statique  $\dot{\epsilon}_{stat}$ .

### 3.2.2. Modification du modèle Elément Discret et résultats

Le modèle est modifié de sorte que la résistance en traction locale  $T$  dépende du taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  :

$$\frac{T_{td}}{T_{ts}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_{stat} \\ \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{stat}}\right)^\delta & \text{si } \dot{\epsilon}_{stat} < \dot{\epsilon} \leq 10^0 s^{-1} \\ \theta \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{stat}}\right)^{\frac{1}{3}} & \text{si } \dot{\epsilon} > 10^0 s^{-1} \end{cases} \quad [12]$$

où

$T_{td}$  est la résistance en traction locale à  $\dot{\epsilon}$ ,  $T_{ts}$  est la résistance locale en traction quasi-statique à  $\dot{\epsilon}_{stat}$  et

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{stat} &= 5.10^{-6} s^{-1} \\ \log(\theta) &= \left(\frac{1}{3} - \delta\right) \log(\dot{\epsilon}_{stat}) \\ \delta &= \frac{1}{38} \\ \sigma_{co} &= 10MPa \end{aligned}$$

Si l'on considère un couple d'éléments discrets a et b en interaction, de vecteurs vitesses  $\mathbf{V}_a$  et  $\mathbf{V}_b$  et de vecteurs position  $\mathbf{x}_a$  et  $\mathbf{x}_b$ , le taux de déformation discret est donné par :

$$\dot{\epsilon} = \frac{(\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a) \cdot (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)}{\|\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a\|^2} \quad [13]$$

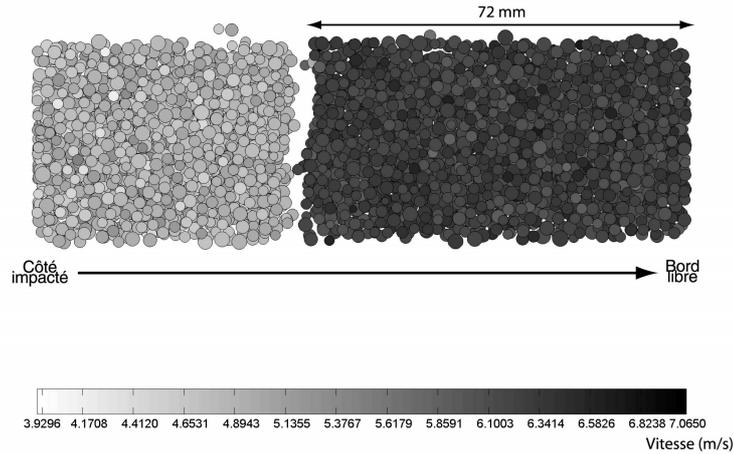
Dans le cas de la simulation des essais BE16 et BE12,  $T_{ts} = 2.8MPa$  (identifié pour obtenir une résistance en traction quasi-statique  $\sigma_{ts} = 4MPa$ ). Les figures 13 et 14 montrent le champ des vitesses axiales dans l'échantillon pour les deux essais avec le modèle modifié, à l'instant  $t = 3.28.10^{-3}s$  après impact.

Les résultats sont regroupés dans le tableau 3, en termes de position de rupture, de contraintes à rupture et de vitesse d'éjection.

Ces résultats sont très satisfaisants et tendent à montrer que le modèle modifié est capable de reproduire précisément l'effet de vitesse en traction : pour l'essai BE16, la position de la rupture est la même que dans le cas où la résistance locale a été augmentée artificiellement et donc très proche de la position expérimentale. Plus important, c'est aussi le cas de la contrainte à rupture : la vitesse d'éjection est presque inchangée et la contrainte homogénéisée est encore plus proche. Pour l'essai BE12, les positions des ruptures sont de nouveau proches des positions expérimentales. Les contraintes à rupture, légèrement en deçà des résultats expérimentaux, sont très cohérentes, qu'elles soient calculées par les vitesses d'éjection ou par homogénéisation, du moins pour la première rupture.

## 4. Conclusion

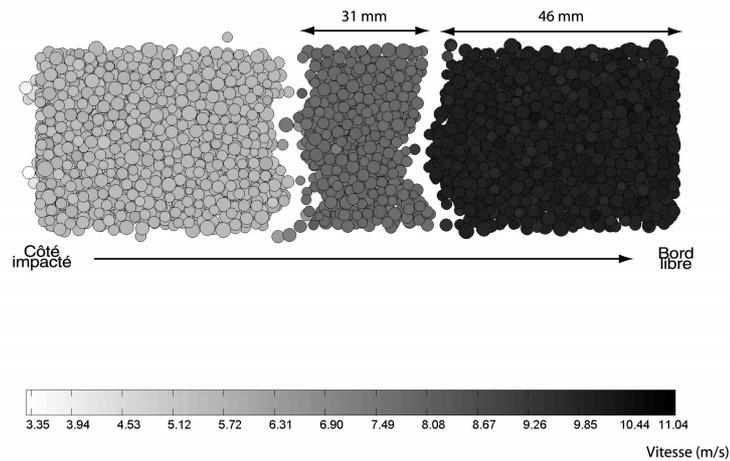
Le modèle aux Eléments Discrets tri-dimensionnel a montré ses capacités à modéliser le béton sous des chargements dynamiques à haut taux de déformation, en



**Figure 13.** Essai BE16 avec le modèle modifié : Champ des vitesses axiales dans l'échantillon à  $t = 3.28.10^{-3}s$

Test N°	BE16	BE12
$Z_c$ expérimental (mm)	65.8	Première : 69, seconde : 41
$Z_c$ simulé (mm)	72 (à $t = 60.10^{-6}s$ )	Première : 77, seconde : 46 ( $t \simeq 55.10^{-6}s$ )
$\sigma_{td}$ expérimental (MPa)	19.2	33.5 (pour la première rupture)
$\sigma_{td}$ déduite par homogénéisation (MPa)	21	28
$V_e$ simulée	2.4 (à $t = 81.10^{-6}s$ )	Première : 2.8, seconde : 2
$\sigma_{td}$ déduite de $V_e$ (MPa)	21.7	Première : 25, seconde : 18

**Tableau 3.** Comparaison des résultats expérimentaux des essais de traction et de leurs simulations numériques avec le modèle modifié : Distance de la rupture au bord libre de l'échantillon  $Z_c$ , contrainte à rupture  $\sigma_{td}$  et vitesse d'éjection  $V_e$



**Figure 14.** Essai BE12 avec le modèle modifié : Champ des vitesses axiales dans l'échantillon à  $t = 3.28.10^{-3}s$

particulier en termes d'augmentation de résistance avec le taux de déformation. Il avait déjà été validé en ce qui concerne le comportement quasi-statique du béton et sa validation avait ensuite été étendue à la compression dynamique.

Des essais de traction dynamique aux barres d'Hopkinson ont été simulés, à des taux de déformations variant de  $36$  à  $70s^{-1}$ . Les caractéristiques réelles du béton considéré ont été obtenues grâce à la calibration quasi-statique des paramètres locaux. Grâce à cette étape, les résultats de la simulation des essais dynamiques sont très satisfaisants qualitativement, aussi bien que quantitativement : inchangé, le modèle n'a pas montré de dépendance au taux de déformation, mais une augmentation de la résistance locale à la traction a suffi à être en accord avec l'expérience. Ce résultat semble montrer tout d'abord que l'inertie seule ne peut expliquer l'effet de vitesse dans cette gamme de taux de déformation et ensuite qu'en traction, cet effet est un effet matériau. Ceci justifie l'introduction d'une loi de dépendance locale au taux de déformation. La forme, le nombre et les positions des ruptures sont reproduits de façon très satisfaisante, ainsi que l'augmentation de la résistance.

Ces simulations ont étendu la validation de la méthode pour modéliser le béton sous ces types de chargement. La simulation de structures en béton armé sous chargement dynamique est alors possible.

## 5. Bibliographie

- [BAZ 83] BAZANT Z. P., OH B., « Crack-Band Theory for Fracture of Concrete », *Materials and Structures*, vol. 16, 1983, p. 155-177.
- [BIS 91] BISCHOFF P., PERRY S., « Compressive Behaviour of Concrete at High Strain Rates », *Materials and structures*, vol. 24, 1991, p. 425-450.
- [BIS 95] BISCHOFF P. H., PERRY S. H., « Impact Behavior of Plain Concrete Loaded in Uniaxial Compression », *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, n° 6, 1995, p. 685-693.
- [BRA 99] BRARA A., « Etude Expérimentale de la Traction Dynamique Du Béton Par Écaillage », PhD thesis, Université de Metz, 1999.
- [BUR 00] BURLION N., GATUINGT F., PIJAUDIER-CABOT G., DAUDEVILLE L., « Compaction and Tensile Damage in Concrete : Constitutive Modelling and Application to Dynamics », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 183, n° 3-4, 2000, p. 291-308.
- [CAM 99] CAMBORDE F., « Modélisation Du Comportement Dynamique Du Béton - Application Aux Problèmes D'impacts et D'explosions », PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1999.
- [CAM 00] CAMBORDE F., MARIOTTI F., DONZÉ F.-V., « Numerical Study of Rock and Concrete Behaviour by Discrete Element Modelling », *Computers and geotechnics*, vol. 27, n° 4, 2000, p. 225-247.
- [CEB93] « CEB-FIP Model Code 1990 », trowbridge, Wiltshire, UK, 1993, Comité Euro-international du Béton, Redwood books.
- [CUN 79] CUNDALL P., STRACK O., « A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies », *Géotechnique*, vol. 29, n° 1, 1979, p. 47-65.
- [CUN 88] CUNDALL P., « Formulation of a Three-Dimensional Distinct Element Model - Part I : A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System Composed of Many Polyhedral Blocks », *International journal of rock mechanics Min. Sci. geomech. Abstr.*, vol. 25, n° 3, 1988, p. 107-116.
- [DEB 90] DEBORST R., SLUYS L., « Localization in a Cosserat Continuum under Static and Dynamic Loading Conditions », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 90, 1990, p. 805-827.
- [DON 00] DONZÉ F.-V., « SDEC (Spherical Discrete Element Code), Version 2.00 », [www.geonum.com](http://www.geonum.com), France, 2000.
- [DON 02] DONZÉ F.-V., « Packing Spherical Discrete Elements of Unequal Size », rapport n° ISRN : GEONUM-NST-2002-02-FR+ENG, 2002, GEONUM report, [www.geonum.com](http://www.geonum.com), France.
- [GAR 96] GARY G., ZHAO H., « Measurements of the Dynamic Behaviour of Concrete under Impact Loading », *Proceedings of 2nd ISIE'96*, Beijing, China, 1996.
- [GAR 98] GARY G., BAILLY P., « Behaviour of Quasi-Brittle Material at High Strain Rate. Experiment and Modelling », *European Journal of Mechanics, A/solids*, vol. 17, n° 3, 1998, p. 403-420.
- [GOP 96] GOPALARATNAM V., GERSTLE W., ISENBERG J., MINDESS S., « State-of-the-Art Report on Dynamic Fracture », *ACI Committee*, vol. 446, 1996.
- [HEN 02] HENTZ S., DAUDEVILLE L., DONZÉ F.-V., « Discrete Element Modelling of Concrete and Identification of the Constitutive Behaviour », *Journal of Engineering Mechanics, à paraître*, , 2002.

- [JAN 76] JANACH W., « The Role of Bulking in Brittle Failure of Rocks under Rapid Compression », *Inter. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, vol. 13, 1976, p. 177-186.
- [JOD 85] JODREY W., TORY E., « Computer Simulation of Close Random Packing of Equal Spheres », *Physical review A*, vol. 32, n° 4, 1985, p. 2347-2351.
- [KLE 90] KLEPACZKO J., *Dynamic Crack Initiation. Some Experimental Methods and Modelling*, springer-verlag, Vienna New York, 1990.
- [KLE 01] KLEPACZKO J., BRARA A., « An Experimental Method for Dynamic Tensile Testing of Concrete by Spalling », *International journal of impact engineering*, vol. 25, 2001, p. 387-409.
- [LIA 97] LIAO C.-L., CHANG T.-P., YOUNG D.-H., « Stress-Strain Relationship for Granular Materials Based on the Hypothesis of Best Fit », *Int. j. Solids Structures*, vol. 34, n° 31-32, 1997, p. 4087-4100.
- [MAL 98] MALVAR L. J., CRAWFORD J. E., « Dynamic Increase Factors for Concrete », *28th Department of Defense Explosives Safety Seminar*, Orlando, FL, august 1998.
- [MAZ 84] MAZARS J., « Application de la Mécanique de L'endommagement Au Comportement Non Linéaire et À la Rupture Du Béton de Structure », Master's thesis, thèse de doctorat d'état de l'université Paris VI, 1984.
- [MEG 89] MEGURO K., HAKUNO M., « Fracture Analyses of Concrete Structures by the Modified Distinct Element Method », *Structural engineering/earthquake engineering*, vol. 6, n° 2, 1989, p. 283-294.
- [PIJ 93] PIJAUDIER-CABOT G., BENALLAL A., « Strain Localization and Bifurcation in a Nonlocal Continuum », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, n° 13, 1993, p. 1761-1775.
- [POT 96] POTYONDY D., CUNDALL P., LEE C., « Modelling Rock Using Bonded Assemblies of Circular Particles », *Rock Mechanics*, , 1996, p. 1937-1944.
- [ROS 94] ROSSI P., MIER J. G. V., TOUTLEMONDE F., MAOU F. L., BOULAY C., « Effect of Loading Rate on the Strength of Concrete Subjected to Uniaxial Tension », *Materials and Structures*, vol. 27, 1994, p. 260-264.
- [THA 01] THABET A., HALDANE D., « Three-Dimensional Numerical Simulation of the Behaviour of Standard Concrete Test Specimens When Subjected to Impact Loading », *Computers and Structures*, vol. 79, 2001, p. 21-31.
- [TOU 94] TOUTLEMONDE F., ROSSI P., « Major Parameters Governing Concrete Dynamic Behaviour and Dynamic Failure of Concrete Structures », *Euro-DYMAT 94*, Oxford, GB, September 1994, p. 26-30.
- [TOU 95] TOUTLEMONDE F., « Résistance Au Choc Des Structures En Béton ; Du Comportement Du Matériau Au Calcul Des Ouvrages », PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [ZHA 96] ZHAO H., GARY G., « On the Use of SHPB Techniques to Determine the Dynamic Behavior of Materials in the Range of Small Strains », *Int. J. Solids Structures*, vol. 33, n° 23, 1996, p. 3363-3375.