

ou en notant les modes comme en (2.4):

$$\theta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. D'après (3.2), la solution peut s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}(\theta_1(0) + \theta_2(0)) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1(0) + \dot{\theta}_2(0)) \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ + \left(\frac{1}{2}(\theta_1(0) - \theta_2(0)) \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1(0) - \dot{\theta}_2(0)) \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où pour $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$; $\theta_2(0) = 0$:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \theta(0) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{pmatrix}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

Pour $ka^2 \ll mgl$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \approx \theta(0) \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \cos(\omega_{ave} t) \\ \sin(\omega_B t) \sin(\omega_{ave} t) \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} \left(1 + \frac{2ka^2}{mgl} \right)^{1/2}}$$

avec:

$$\omega_B = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{k}{m} \frac{a^2}{\sqrt{gL^3}}$$

ω_B : puissance de battement

$$\omega_{ave} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \sqrt{\frac{g}{L}} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \frac{a^2}{\sqrt{gL^3}}$$