1. Dans des axes (k, y) centrés au centre de rotation O de la couronne,

la vitesse de la masse est :

$$v = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \Omega \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \Omega y \\ \dot{y} + \Omega x \end{pmatrix} = \dot{x} e_1 + x \dot{e}_1 + \dot{y} e_2 + y \dot{e}_2$$
$$= \dot{x} e_1 + x \Omega \wedge e_1 + \dot{y} e_2 + y \Omega \wedge e_2$$
$$= \dot{x} e_1 + x \Omega e_2 + \dot{y} e_2 - y \Omega e_1$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{2} m \left((\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 \right) + \frac{1}{2} I \Omega^2 .$$

Energie potentielle

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2$$

Travail virtuel des forces visqueuses

$$\delta W_{nc} = - c_1 \dot{x} \, \delta x = Q^{diss} \delta x \Rightarrow Q^{diss} = -c_1 \dot{x} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \mathcal{D} = +\frac{1}{2} c_1 \dot{x}^2 .$$

Les équations de mouvement sont donc :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q^{nc}$$

$$M \ddot{q} + (C + G) \dot{q} + \underbrace{(K - \Omega^2 M)}_{\text{déf. positive pour stabilité ie } \Omega < \min(k_1, k_2)/m} q = 0$$

$q = [x \; y]^T$

avec

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

2. Répartition des énergies.

$$\vec{\Omega} \wedge v = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q} \dot{q} = \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{q} \quad \text{car } U = \dot{q}$$

d'où :

$$T_0 = T(q, \dot{q} = 0, t) = \frac{1}{2} m \Omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{\Omega^2}{2} q^T M q$$
$$T_1 = m \Omega (x \dot{y} - \dot{x} y) = \frac{1}{2} \dot{q}^T G q$$

} inertie d'entraînement

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q}$$ inertie relative

$$V_{int} = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 = \frac{1}{2} q^T K q$$ potentiel élastique

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q}$$ potentiel de dissipation.