

## Chapitre I

Principe de Hamilton et Equations de Lagrange  
pour les systemes discrets

# 1. Principe des travaux virtuels

Soit un point de masse  $m$  soumis à un champ de force  $X$  :

L'équilibre dynamique, ou équations de mouvement, s'écrit :

$$(1.1) \quad m \frac{d^2 u}{dt^2} - X = 0$$

où  $u$  désigne le déplacement du point. Soit  $u^*$  un déplacement de la masse différent du déplacement réel  $u(t)$ . Cependant pour un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  donné, nous imposons au déplacement virtuel  $u^*(t)$  d'être égal à  $u(t)$  pour  $t = t_1$  et  $t = t_2$  i.e.

$$(1.2) \quad \delta u = u^* - u \text{ arbitraire mais } \delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0.$$

Alors les opérateurs  $\delta$  et  $\frac{d}{dt}$  commutent :  $\mathbb{R}$  permet d'omettre les forces de liaison

$$(1.3) \quad \delta \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \delta$$

car :

$$\frac{d}{dt} \delta u = \frac{d}{dt} (u^* - u) = \frac{du^*}{dt} - \frac{du}{dt} = \delta \frac{du}{dt}$$

De (1) vient immédiatement :

$$(1.4) \quad (m \frac{d^2 u}{dt^2} - X) \cdot \delta u = 0$$

i.e. le travail virtuel effectué par les forces agissant sur un point matériel lors d'un déplacement virtuel  $\delta u$  non nul.

Ces relations s'étendent à un système de  $N$  points matériels pour lequel

(4) s'écrit :

$$(1.4)' \quad \sum_{k=1}^N (m_{(k)} \frac{d^2 u_{(k)}}{dt^2} - X_{(k)}) \cdot \delta u_{(k)} = 0$$

## 2. Coordonnées généralisées

2.1. Déf: pour un système à N degrés de liberté, un ensemble de coordonnées généralisées permet de spécifier complètement les positions:

elles sont indépendantes et au nombre de N.

Pour un même système, il existe en général plusieurs ensembles de coordonnées généralisées.

On note: les déplacements

$$(2.1) \quad u^{(k)}(x, t) = U^{(k)}(\underbrace{q_1, \dots, q_N}_\equiv q, t) \quad ; \quad k=1 \rightarrow N.$$

## 2.2. Liaisons

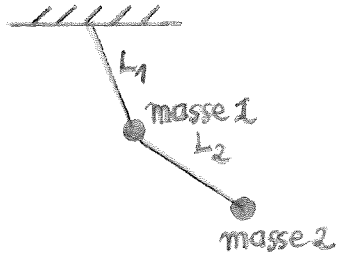
Partant d'une configuration de référence  $x^{(k)}$ ,  $k=1 \rightarrow N$ , on peut définir les positions actuelles  $\bar{x}$  à l'aide des déplacements  $u^{(k)}$ :

$$\xi^{(k)}(t) = x^{(k)} + u^{(k)}(x^{(k)}, t)$$

Cependant, il peut exister des contraintes cinématiques qui restreignent les mouvements.

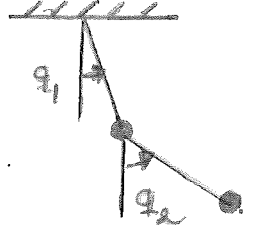
liaison holonome:  $f(\xi, t) = 0$   $\begin{cases} f(\xi) = 0 & \text{scléronome} \\ f(\xi, t) = 0 & \text{rhéonome} \end{cases}$

ex: pendule double avec bras rigides

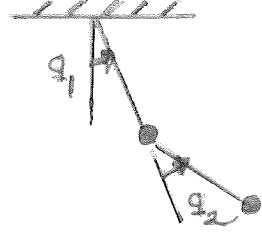


$$\begin{aligned} \|\xi^{(1)}\| &= L_1, \\ \|\xi^{(2)} - \xi^{(1)}\| &= L_2 \end{aligned}$$

Il existe donc 2 relations entre les 4 coordonnées  $\xi^{(k)}$ ,  $k=1,2$ , soit 2 degrés de liberté que l'on peut caractériser par des angles:

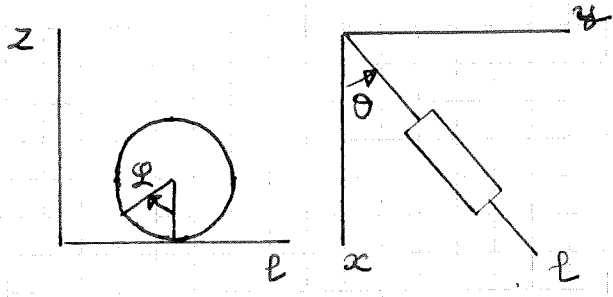


ou



liaison non-holonyme : toutes les autres liaisons. Elles ne permettent pas de réduire le nb de d° de liberté (= nb de coordonnées généralisées) du système.

ex: roue roulant sans glisser sur un plan et restant verticale



le système est décrit par 8 variables

$x_c \ y_c \ z_c$      $x \ y \ z$      $\theta \ \varphi$   
 coord. centre    coord.    angle d'un point de la circonférence

$$\begin{cases} x = x_c + r \sin \varphi \cos \theta \\ y = y_c + r \sin \varphi \sin \theta \\ z = z_c + r \cos \varphi \end{cases} \quad \text{liaisons holonomes}$$

$z_c = r$     liaison holonyme

$$\begin{cases} \dot{x} - r \dot{\varphi} \cos \theta = 0 \\ \dot{y} - r \dot{\varphi} \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{liaisons non holonomes (roulement sans glissement)} \\ n \text{ relations de comportement} \end{array}$$

Il faudra donc  $8 - 3 - 1 = 4$  coordonnées généralisées.

### 2.3 Forces généralisées

Elles sont définies à partir du travail:

$$\sum_{k=1}^N X_k \delta u_k = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_i = \sum_{k=1}^N X_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial q_i}} \quad (2.2)$$

### 3. Classification des forces généralisées

#### 3.1 Forces intérieures / internes

##### Forces de liaison

Ce sont les forces qui apparaissent pour assurer l'équilibre entre points matériels dans une liaison rigide :

$$(3.1) \quad \bullet \xrightarrow{F_1} \quad \xleftarrow{F_2} \bullet, \quad F_1 + F_2 = 0$$

Le travail virtuel associé au déplacement virtuel des points matériels ( $\delta u_1, \delta u_2 = \delta u_2$ ) est nul :

$$\delta W = F_1 \cdot \delta u_1 + F_2 \cdot \delta u_2 = F_1 \cdot (\delta u_1 - \delta u_2) = 0.$$

Ces forces qui ne travaillent pas n'apparaissent pas dans une approche énergétique (p.e. principe de Hamilton).

##### Forces élastiques

Dans un corps élastique, tout travail réalisé est stocké sous forme récupérable en énergie interne  $V_{int}$  :

$$(3.2) \quad \delta V_{int} = - \sum_{i=1}^N Q_i^{el} \delta q_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{force élastique généralisée} \\ Q_i^{el} = - \frac{\partial V_{int}}{\partial q_i}, i=1 \rightarrow N \end{array}}$$

↑  
coordonnées généralisées

##### Forces dissipatives

Une force dissipative est parallèle et opposée à la vitesse du point où elle s'applique

$$(3.3) \quad F = - \underbrace{C}_{\substack{\text{constante} \\ > 0}} f(|v|) \text{ dir } v$$

Le travail virtuel associé à un déplacement virtuel  $\delta u$  est donc

$$(3.4) \quad F \cdot \delta u = \sum_{i=1}^N F \cdot \frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i \equiv \sum_{i=1}^N Q_i^{diss} \delta q_i$$

↑  
par définition des forces généralisées associées aux coordonnées gén.

d'autre :

$$(3.5) \quad Q_i^{\text{diss}} = + F_0 \frac{\partial U}{\partial q_i} = - C f(|v|) \text{dir } v \cdot \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Puisque d'après (2.1):

$$(3.6) \quad v = \frac{d}{dt} u = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

alors

$$(3.7) \quad \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

La force généralisée  $Q_i^{\text{diss}}$  devient :

$$(3.8) \quad Q_i^{\text{diss}} = - C f(|v|) \text{dir } v \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i} = - C f(|v|) \frac{\partial |v|}{\partial \dot{q}_i}$$

Si l'on introduit la fonction de dissipation  $\mathcal{D}$  :

$$(3.9) \quad \mathcal{D} \equiv \int_0^{|v|} C f(x) dx$$

il vient : force dissipative généralisée

$$(3.10) \quad \boxed{Q_i^{\text{diss}} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1 \rightarrow N}$$

et la puissance dissipée est

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^N Q_i^{\text{diss}} \dot{q}_i = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \left( = - d\mathcal{D} \right) \begin{cases} d=1 & \text{frottement sec} \\ d=2 & \text{frottement visqueux} \\ d=3 & \text{trainée aérodynamique} \end{cases}$$

si  $\mathcal{D}$  homogène de  $d^{\circ} d$ .

## 3.2 Forces extérieures / externes

### Forces conservatives

Si le travail sur tout cycle fermé dans l'espace des coordonnées généralisées d'une force est nul, elle est dite conservative ; elle dérive alors d'un potentiel :

$$(3.12) \quad \oint_{\mathcal{C}_i} Q_i \delta q_i = 0, \quad \forall \mathcal{C}_i \Rightarrow \boxed{Q_i = - \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial q_i}}$$

Force externe conservative

## Forces non conservatives

Dans le cas contraire, on définit les forces généralisées par la formule de dualité usuelle (cf section 2.3):

$$\delta W = \sum_k \lambda^{(k)} \delta u^{(k)} = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i$$

$$= \sum_k \sum_{i=1}^N \lambda^{(k)} \cdot \frac{\partial u^{(k)}}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\Rightarrow \underline{Q_i = \sum_k \lambda^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial q_i}}$$

### 3.3 Forces d'inertie

L'énergie cinétique s'écrit:

(3.13)  $T = \frac{1}{2} m v^2$  ou  $\sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2$  ou  $\int \frac{1}{2} m v^2 dx$   
 pour un système discret      pour un système continu

Par définition des coordonnées généralisées  $q$ , le déplacement  $u$  peut s'écrire

$$u(x, t) = U(q_1, \dots, q_N, t)$$

↙ notations ↘

soit pour la vitesse:

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q} \cdot \dot{q}$$

$q \equiv [q_1, q_2, q_3, \dots, q_N]^T$

L'énergie cinétique devient:

(3.14)  $T(q, \dot{q}, t) = T_0(q, t) + T_1(q, \dot{q}, t) + T_2(q, \dot{q}, t)$

où:  $T_j$ : homogène de degré  $j$  en  $\dot{q}$

(3.15) 
$$\begin{cases} T_0(q, t) \equiv \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 & \text{énergie cinétique d'entraînement} \\ & = T(q, \dot{q}=0, t) \\ T_1(q, \dot{q}, t) \equiv m \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial q} \cdot \dot{q} \right) & \text{" mutuelle} \\ T_2(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial U}{\partial q} \cdot \dot{q} \right) \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial q} \cdot \dot{q} \right) & \text{" relative} \end{cases}$$

L'homogénéité implique (théorème d'Euler):

(3.16)  $T_j = \frac{1}{j} \frac{\partial T_j}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q}, \quad j=1, 2.$

Une autre expression de l'énergie cinétique est donc:

(3.17)<sub>1</sub>  $T(q, \dot{q}, t) = M^{(0)} + M^{(1)} \cdot \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M^{(2)} \dot{q}$

(3.17)<sub>2</sub> avec  $M^{(0)} = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2, \quad M^{(1)} = m \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad M^{(2)} = m \frac{\partial U}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_j}$

Si le temps n'intervient pas explicitement dans  $T$ , i.e. liaisons scléronomes, le terme  $\frac{\partial U}{\partial t}$  n'apparaît pas et  $T = T_2(q, \dot{q})$ .



### Conséquences pour les équations de Lagrange

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = \\
& = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} (T_0 + T_1 + T_2) \\
& \stackrel{2}{=} \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \right)}_1 - \underbrace{\frac{\partial^2 T_1}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}}_3 \cdot \dot{q}_j - \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right)}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i} (T_0 + T_1 + T_2)}_{1 \ 3 \ 2}
\end{aligned}$$

(3.18)<sub>1</sub>  $= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T_0}{\partial q_i}$  force d'inertie d'entraînement  
= force d'inertie totale pour  $\dot{q} = 0$ .

(3.18)<sub>2</sub>  $-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T_2}{\partial q_i}$  force d'inertie relative

(3.18)<sub>3</sub>  $F_i^G = -\frac{\partial^2 T_1}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial T_1}{\partial q_i}$  force d'inertie complémentaire  
de nature gyroscopique

les forces d'inertie complémentaires se transforment en :

(3.19)  $F_i^G = -\frac{\partial^2 T_1}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^N g_{ji} \dot{q}_j$   
↓  
 $g_{ji} + g_{ij} = 0$

et leur travail / puissance fournie au système est nul.

4. Principe de Hamilton ~ W.R. Hamilton (1805-1865), astronome, Dublin all his life

Soit  $q = [q_1, \dots, q_N]$  un ensemble de coordonnées généralisées décrivant un système à  $N$  degrés de liberté. On suppose :

- $T = T(q, \dot{q}, t)$  énergie cinétique
- $V = V(q, t)$  énergie potentielle totale =  
Énergie élastique - travail des forces ext. conservatives
- $\delta W_{nc} = Q^{nc} \cdot \delta q$  travail virtuel des forces non conservatives  
dans des variations des  $q$  /  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ .

La trajectoire réelle  $q = q(t)$  du système dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$  est celle qui, parmi toutes les trajectoires virtuelles  $q^*(t)$  satisfaisant

(4.1)  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

avec  $\delta q(t) = q^*(t) - q(t)$ , rend stationnaire l'expression intégrale

(4.2) 
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T - V dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

d'où

(4.3) 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^{nc}, \quad i = 1 \rightarrow N$$

équations de LAGRANGE

Giuseppe Luigi Lagrange  
Turin 1736 - Paris 1813  
a séjourné à Berlin, puis Paris

On peut expliciter et/ou regrouper certains termes :

- l'énergie cinétique  $T = T_0(q, t) + T_1(q, \dot{q}, t) + T_2(q, \dot{q}, t)$
- potentielle  $V = V_{el} + V_{ext}$ ,  $Q^{nc, ext} = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial q}$  forces extérieures conservatives  
 $V^* = V_{int} - T_0$ ,  $Q^{nc, c} = -\frac{\partial V^*}{\partial q}(q, t)$  forces internes modifiées
- les forces non conservatives  $Q^{nc} = Q^{nc, diss} + Q^{nc, ext}$ ,  $Q^{nc, diss} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

## Preuve

① Partons du principe du travail virtuel (1.4') intégré dans le temps:

$$(1) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^N (m(k) \frac{d^2 u(k)}{dt^2} - X(k)) \cdot \delta u(k) = 0$$

et utilisons la définition des coordonnées / forces généralisées (2.2)

$$(2) \quad \sum_{k=1}^N X(k) \cdot \delta u(k) = \sum_{k=1}^N Q_k \cdot \delta q_k$$

D'autre part, l'énergie cinétique  $T$  vaut:

$$(3) \quad T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m(k) \frac{du(k)}{dt} \cdot \frac{du(k)}{dt}$$

$$\text{d'où grâce à (1.3): } \frac{d}{dt} \delta = \delta \frac{d}{dt} \quad \delta \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right) = m \frac{du}{dt} \delta \left( \frac{du}{dt} \right) = m \frac{du}{dt} \frac{d(\delta u)}{dt}$$

$$(4) \quad \delta T = \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \left( m(k) \frac{du(k)}{dt} \cdot \delta u(k) \right) - m(k) \frac{d^2 u(k)}{dt^2} \cdot \delta u(k)$$

Au total, le principe du travail virtuel sous forme intégrée devient:

$$(5) \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \underbrace{\sum_{k=1}^N \left[ m(k) \frac{du(k)}{dt} \cdot \delta u(k) \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ par (1.2)}} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^N Q_k \delta q_k dt}_{\text{par (2)}} = 0$$

Décomposant les forces en une partie conservative et une partie non conservative

$$(6) \quad Q = -Q^c + Q^{nc}, \quad Q^c \equiv -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q}$$

le principe de Hamilton s'écrit  $[Z: \delta V = \frac{\partial V}{\partial q} \delta q ! \text{ on ne fait pas varier } t]$

② Pour obtenir les équations de Lagrange, transformons le principe de Hamilton comme suit ? :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + Q_i^{nc} \delta q_i \right) dt = 0$$

Par intégration par parties, le second terme devient avec (4.3):

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \underbrace{\left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ grâce à (4.1)}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

d'où le résultat  $\equiv QED$

### 5. Conservation et dissipation de l'énergie

Soit  $L$  le lagrangien du système :

$$(5.1) \quad L \equiv L(q, \dot{q}, t) \equiv T - V$$

Le principe de Hamilton, ou les équations de Lagrange, implique :

$$(5.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^{nc} \quad \text{car } V=V(q, t) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q}$$

d'où :

$$(5.3) \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \cdot \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} - Q^{nc} \cdot \dot{q}$$

ou encore

$$(5.4) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t} + Q^{nc} \cdot \dot{q} = - \frac{\partial L}{\partial t} - 2D + Q^{nc}_{ext} \cdot \dot{q}$$

$\equiv E$  fonction énergie based on  $q$

Associés à  $L$  une décomposition  $L = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t)$  semblable à celle de l'énergie cinétique. Alors :

$$(5.5) \quad E = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0 = (T_2 - V_2) - (T_0 + V_0) = T_2 + V_0 - T_0 - V_2$$

d'où :

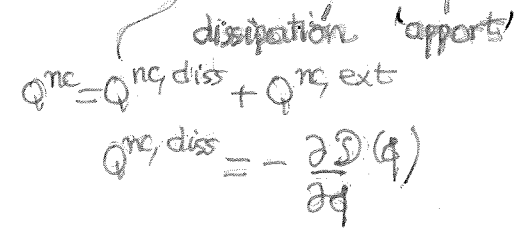
$$(5.6) \quad \text{si } \begin{cases} T = T(q, \dot{q}, t) \Rightarrow T = T_2(q, \dot{q}) \\ V = V(q, t) \Rightarrow V = V_0(q, t) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} (T + V) = - \frac{\partial L}{\partial t} + Q^{nc} \cdot \dot{q}$$

ou encore

↑ indépendant de  $\dot{q}$

2 pour frottement visqueux

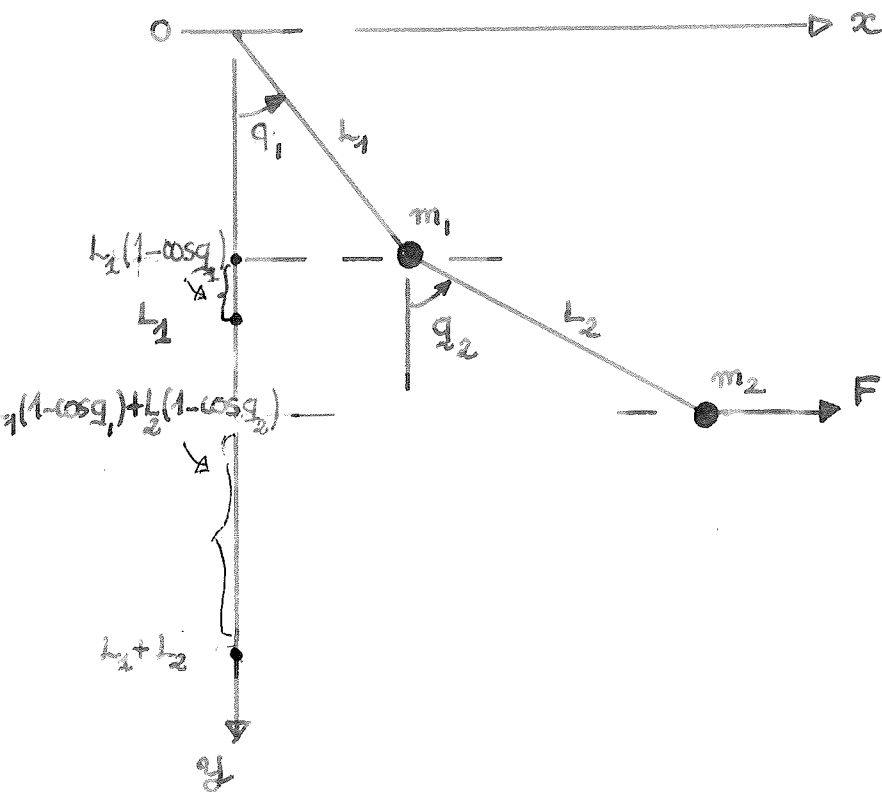
$$(5.7) \quad \text{si } \begin{cases} T = T_2(q, \dot{q}, t) \Rightarrow T = T_2(q, \dot{q}) \\ V = V_0(q, t) \Rightarrow V = V_0(q) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (T + V) = Q^{nc} \cdot \dot{q} = -2D + Q^{nc}_{ext} \cdot \dot{q}$$



→ Exo: pendule simple.

$$f(x) \text{ hom d'n} \Rightarrow f(ax) \cdot x = n f$$

Pendule double : résolution à l'aide du principe de Hamilton



• Coordonnées généralisées : angles  $q_1, q_2$

• Energies :

- positions

|            |   |         |   |
|------------|---|---------|---|
| masse 1    | $\begin{cases} x_1 = L_1 \sin q_1 \\ y_1 = L_1 \cos q_1 \end{cases}$                                  | masse 2 | $\begin{cases} x_2 = L_1 \sin q_1 + L_2 \sin q_2 \\ y_2 = L_1 \cos q_1 + L_2 \cos q_2 \end{cases}$  |
| - vitesses | $\begin{cases} \dot{x}_1 = L_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ \dot{y}_1 = -L_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \end{cases}$ |         | $\begin{cases} \dot{x}_2 = L_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + L_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \\ \dot{y}_2 = -L_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - L_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \end{cases}$ |

- énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 + 2 L_1 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1))$$

- énergie potentielle de gravité

signe

$$-V_{ext} = m_1 g L_1 (1 - \cos q_1) + m_2 g (L_1 (1 - \cos q_1) + L_2 (1 - \cos q_2))$$

- travail virtuel de la force horizontale F :

$$\delta W_{nc} = F \delta (L_1 \sin q_1 + L_2 \sin q_2) = F L_1 \cos q_1 \delta q_1 + F L_2 \cos q_2 \delta q_2$$

Le principe de Hamilton donne un système de 2 équations non-linéaires :

$$\begin{cases} (m_1+m_2)L_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 L_1 L_2 \ddot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) - m_2 L_1 L_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_2 - q_1) + (m_1+m_2)g L_1 \sin q_1 = F L_1 \cos q_1 \\ m_2 L_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{q}_1 \cos(q_2 - q_1) + m_2 L_1 L_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 - q_1) + m_2 g L_2 \sin q_2 = F L_2 \cos q_2 \end{cases}$$

qui se réduit à un système linéaire pour de faibles oscillations :

$$M \ddot{q} + K q = F$$

où :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)L_1^2 & m_2 L_1 L_2 \\ m_2 L_1 L_2 & m_2 L_2^2 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)g L_1 & 0 \\ 0 & m_2 g L_2 \end{pmatrix}.$$

les modes propres et pulsations propres  $\omega$  :

$$q(t) = q_0 e^{i\omega t}$$

sont donnés par la relation

$$(-M\omega^2 + K)q_0 = 0 \quad \text{ie} \quad \det(-M\omega^2 + K) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 m_2 L_1^2 L_2^2 \omega^4 - m_2 g (m_1+m_2)(L_1+L_2)L_1 L_2 \omega^2 + m_2 g^2 (m_1+m_2)L_1 L_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 L_1 L_2 \omega^4 - g(m_1+m_2)(L_1+L_2) \omega^2 + g^2(m_1+m_2) = 0 \quad \text{si } m_2 \neq 0$$

Dans le cas particulier

$$m_1 = m_2, \quad L_1 = L_2$$

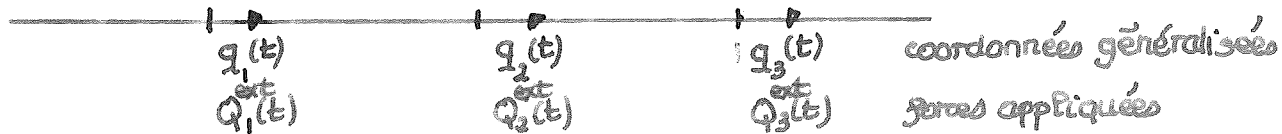
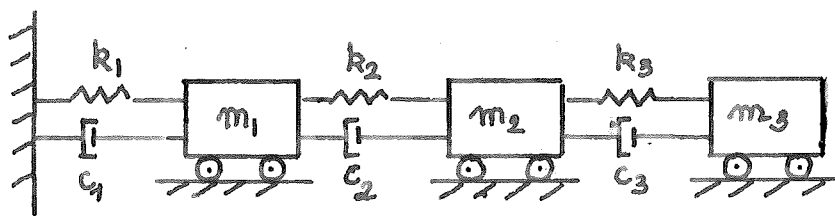
on trouve

$$\omega_\varepsilon = (2 + \varepsilon\sqrt{2})^{1/2} \omega_0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \omega_0 = (g/L)^{1/2} \quad \text{pulsation du pendule simple}$$

et les modes propres :

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -(1 + \varepsilon\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}(\sqrt{2} + \varepsilon) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \varepsilon = 1, & \frac{q_1}{q_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{haute fréquence} & \text{basse fréquence} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} \varepsilon = -1, & \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{haute fréquence} & \text{basse fréquence} \end{matrix}.$$

# Système à trois degrés de liberté



1. Définir l'énergie cinétique,  
l'énergie potentielle,  
le travail virtuel des forces non conservatives (amortisseurs  
et forces appliquées).
2. Equations de Lagrange du mouvement.
3. Analyse spectrale pour  $m_1 = m_2 = m_3$ ,  $k_1 = k_2 = k_3$   
du système non amorti.

1. Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_3^2$$

2. Energie potentielle :

$$\begin{aligned} V_{int} &= \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (q_3 - q_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2) q_1^2 + \frac{1}{2} (k_2 + k_3) q_2^2 + \frac{1}{2} k_3 q_3^2 - k_2 q_1 q_2 - k_3 q_2 q_3 \end{aligned}$$

3. Travail virtuel des forces visqueuses :

$$\begin{aligned} \delta W_{nc,v} &= -c_1 \dot{q}_1 \delta q_1 - c_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (\delta q_2 - \delta q_1) - c_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2) (\delta q_3 - \delta q_2) \\ &= -(c_1 + c_2) \dot{q}_1 \delta q_1 - (c_2 + c_3) \dot{q}_2 \delta q_2 - c_3 \dot{q}_3 \delta q_3 + c_2 \dot{q}_2 \delta q_1 + c_2 \dot{q}_1 \delta q_2 + c_3 \dot{q}_2 \delta q_3 + c_3 \dot{q}_3 \delta q_2 \end{aligned}$$

$$\delta W_{nc,ext} = Q_1^{ext} \delta q_1 + Q_2^{ext} \delta q_2 + Q_3^{ext} \delta q_3$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q_{nc}$$

2.

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = Q^{ext}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

3. Valeurs propres solutions de

$$-x^3 + 5x^2 - 6x + 1 = 0, \quad x = \frac{\Omega^2 m}{R}$$



$$\text{Vecteurs propres } q = [1/(2-x), 1, 1/(1-x)]^T$$

$$\begin{cases} x \in [0, 1] & + & + & + \\ x \in [1, 2] & + & + & - \\ x \in [3, 4] & - & + & - \end{cases}$$



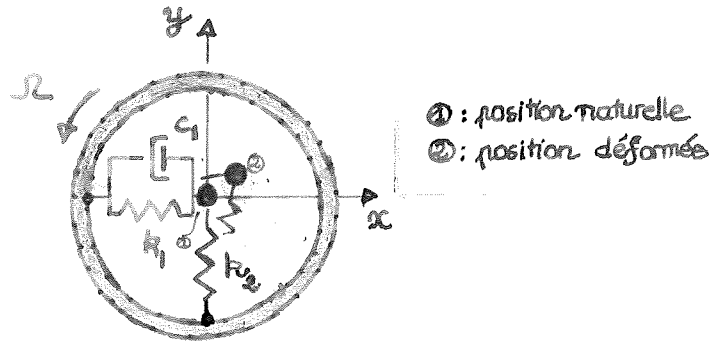
# Systeme tournant à vitesse constante

C1

Soit le système plan constitué

- d'une couronne d'inertie  $I$  animée de la rotation  $\Omega$  constante ;
- d'une masse  $m$  reliée à la couronne par un ressort  $k_2$  et un modèle de Kelvin (ressort  $k_1$ , amortisseur  $c_1$ ).

1. Donner les équations du mouvement de la masse  $m$ .



dans le repère tournant lié à la couronne.

2. Séparer l'énergie en différentes entités interprétables.

1. Dans des axes  $(x, y)$  centrés au centre de rotation  $O$  de la couronne, la vitesse de la masse est :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} + \Omega \wedge \mathbf{OM} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \Omega y \\ \dot{y} + \Omega x \end{pmatrix} = \dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + \Omega(-y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2)$$

$$= \dot{x}\mathbf{e}_1 + x\Omega\mathbf{e}_2 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + y\Omega\mathbf{e}_1$$

$$= \dot{x}\mathbf{e}_1 + x\Omega\mathbf{e}_2 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + y\Omega\mathbf{e}_1$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 + \frac{1}{2} I \Omega^2$$

Energie potentielle

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2$$

Travail virtuel des forces visqueuses

$$\delta W_{vis} = -c_1 \dot{x} \delta x = Q^{diss} \delta x \Rightarrow Q^{diss} = -c_1 \dot{x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \Rightarrow D = +\frac{1}{2} c_1 \dot{x}^2$$

les équations de mouvement sont donc :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q^{nc}$$

dég. positive pour stabilité i.e.  $\Omega < \min(k_1/k_2)/m$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{q} = [x \ y]^T$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

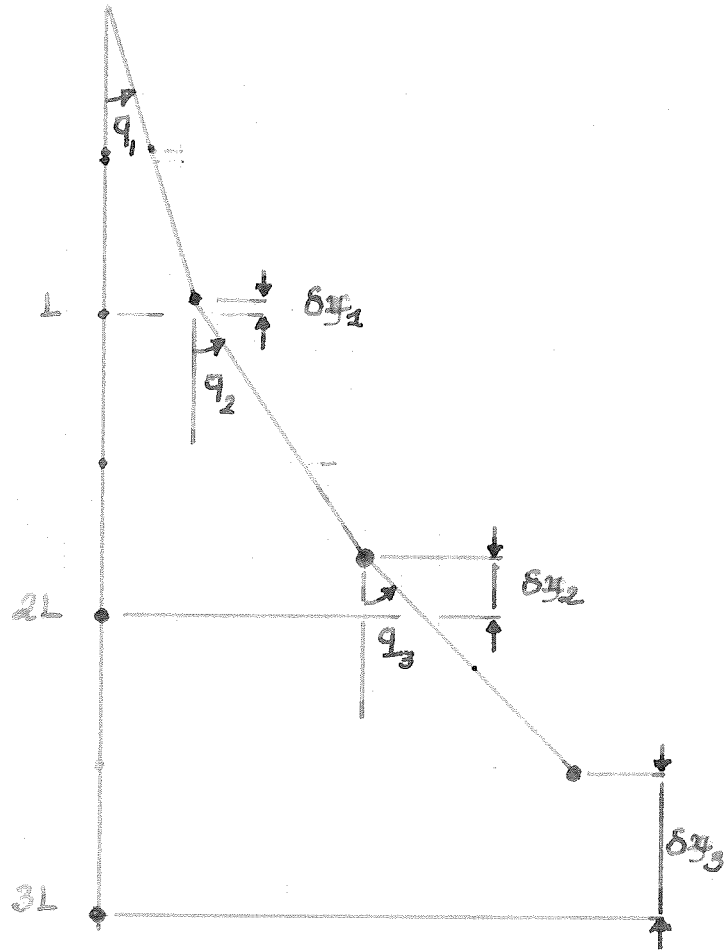
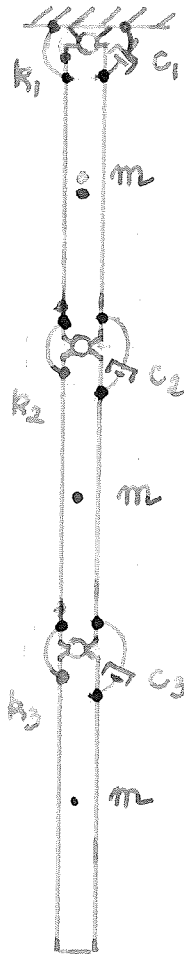
2. Partition des énergies.

$$\mathbf{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \end{pmatrix}}_{\frac{\partial U}{\partial t}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}}} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} \text{ car } U = \dot{\mathbf{q}}$$

d'où :

|   |   |                          |
|---|---|--------------------------|
| $T_0 = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}=0, t) = \frac{1}{2} m \Omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{\Omega^2}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}$ | } | inertie d'entraînement   |
| $T_1 = m \Omega (x\dot{y} - \dot{x}y) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \mathbf{q}$   |   |                          |
| $T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$                                |   | inertie relative         |
| $V_{int} = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$                                    |   | potentiel élastique      |
| $D = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}$  |   | potentiel de dissipation |

# Petits mouvements d'un système de barres rigides à la verticale



1. Choix de coordonnées généralisées

2. Energies

3. Equations de mouvement.

Les perturbations par rapport à la position naturelle sont petites.

1. Coordonnées généralisées :  $q_1, q_2, q_3$  (cf figure)

2. Positions des centres et extrémités des barres

$$\text{centre barre 1} \begin{cases} x_1 \approx \frac{1}{2} q_1 \\ y_1 \approx -\frac{1}{4} q_1^2 + \frac{L}{2} \end{cases} \quad \text{extrémité barre 1} \begin{cases} x = L q_1 \\ y \approx -\frac{1}{2} q_1^2 + L \end{cases}$$

$\leftarrow \sin \times \cos \times$

$$\text{centre barre 2} \begin{cases} x \approx L q_1 + \frac{1}{2} q_2 \\ y \approx -\frac{1}{2} q_1^2 + L - \frac{1}{4} q_2^2 + \frac{L}{2} \end{cases} \quad \text{extrémité barre 2} \begin{cases} x = L q_1 + L q_2 \\ y = -\frac{1}{2} q_1^2 + L - \frac{1}{2} q_2^2 + L \end{cases}$$

$$\text{centre barre 3} \begin{cases} x = L q_1 + L q_2 + \frac{1}{2} q_3 \\ y = -\frac{1}{2} q_1^2 + L - \frac{1}{2} q_2^2 + L - \frac{1}{4} q_3^2 + \frac{L}{2} \end{cases} \quad \text{extrémité barre 3} \begin{cases} x = L q_1 + L q_2 + L q_3 \\ y = -\frac{1}{2} q_1^2 + L - \frac{1}{2} q_2^2 + L - \frac{1}{2} q_3^2 + L \end{cases}$$

2.2. Énergie cinétique

$$T \approx \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{L}{2} \dot{q}_1 \right)^2 + \left( L \dot{q}_1 + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \right)^2 + \left( L \dot{q}_1 + L \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \dot{q}_3 \right)^2 \right] \quad \leftarrow \text{énergie de translation} \quad (\text{négligeable sur } y)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{m L^2}{12} \left[ \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 \right] \quad \leftarrow \text{énergie de rotation des barres} \\ \text{autour de leur centre de gravité}$$

$$= \frac{m L^2}{6} (7 \dot{q}_1^2 + 4 \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 9 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 3 \dot{q}_1 \dot{q}_3)$$

2.3. Énergie potentielle

des ressorts

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (q_3 - q_2)^2$$

due à la gravité

$$V_{\text{ext}} \approx mg \left[ \frac{L}{4} q_1^2 + \frac{L}{2} q_1^2 + \frac{1}{4} q_2^2 + \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{L}{2} q_2^2 + \frac{L}{4} q_3^2 \right]$$

2.4. Travail virtuel des forces non conservatives.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{nc}} &= -c_1 \dot{q}_1 \delta q_1 - c_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (\delta q_2 - \delta q_1) - c_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2) (\delta q_3 - \delta q_2) \\ &= \left[ (-c_1 - c_2) \dot{q}_1 + c_2 \dot{q}_2 \right] \delta q_1 + \left[ c_2 \dot{q}_1 + (-c_2 - c_3) \dot{q}_2 + c_3 \dot{q}_3 \right] \delta q_2 + \left[ c_3 \dot{q}_2 - c_3 \dot{q}_3 \right] \delta q_3 \\ &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 \end{aligned}$$

3. Equations de Lagrange:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0$$

$$M = \frac{mL^2}{6} \begin{pmatrix} 14 & 9 & 3 \\ 9 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

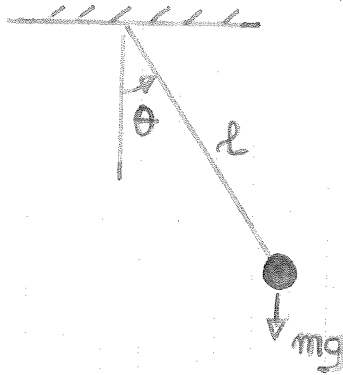
$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}mgL + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & \frac{3}{2}mgL + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & \frac{mgL}{2} + k_3 \end{pmatrix}.$$

↑ rigidité géométrique

## Pendule simple : conservation de l'énergie

CE 1



1. Etudier les mouvements du pendule pesant de longueur  $l$ , de masse  $m$  en supposant la conservation de l'énergie.

Analyser les effets de l'énergie initiale apportée au pendule

2. Calculer la période dans le cas où le mouvement est oscillatoire.

## 1. Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \quad V = mgl(1 - \cos\theta)$$

→ conservation de l'énergie ie  $T + V = E_i$  initiale ie

Si à  $t=0$ , le pendule est au repos  $\dot{\theta}=0$ ,  $\theta = \theta_0$ ,

$$T + V = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

d'où :

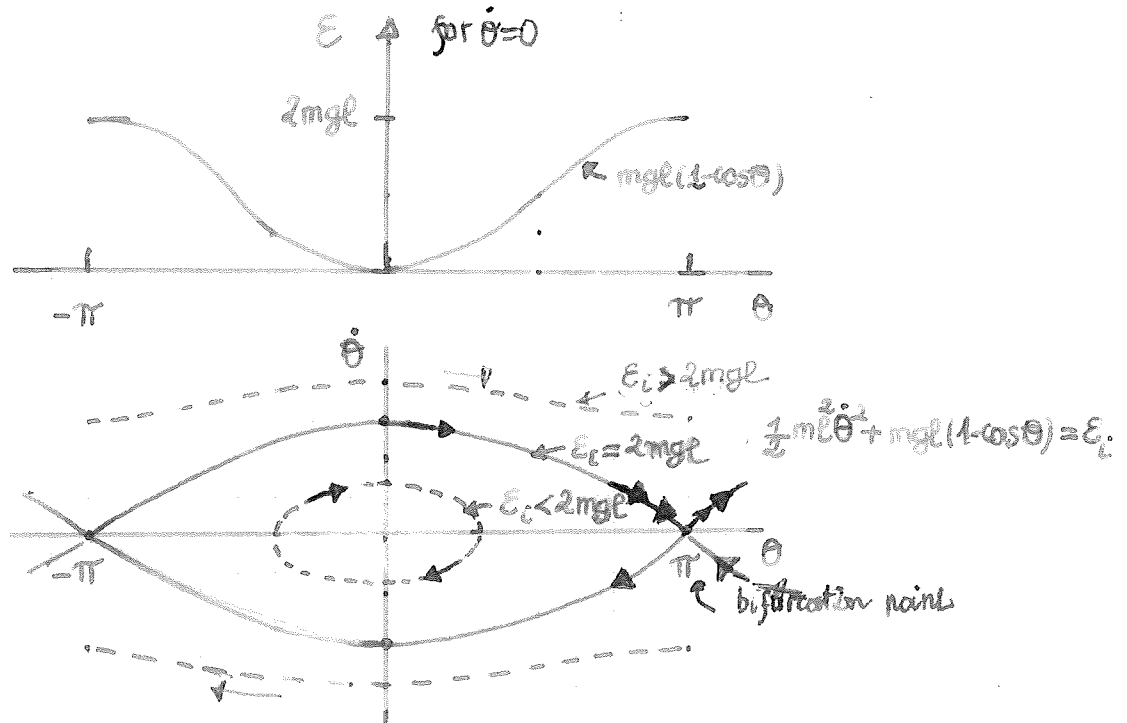
$$\dot{\theta} = \pm \left[ \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0) \right]^{1/2} \begin{cases} - & \text{de droite à gauche} \curvearrowleft \\ + & \text{de gauche à droite} \curvearrowright \end{cases}$$

Plus généralement soit  $E_i$  l'énergie initiale fournie au pendule, d'où :

$$\dot{\theta} = \pm \left[ \frac{2g}{l} \left( \cos\theta + \frac{E_i - mgl}{mgl} \right) \right]^{1/2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq E_i \leq 2mgl, \exists \theta_{lim} = \cos^{-1}\left(1 - \frac{E_i}{mgl}\right) \text{ tel que } \dot{\theta}_{lim} = 0 \Rightarrow \text{mouvement oscillant } \theta \in [-\theta_{lim}, \theta_{lim}] \\ 2mgl \leq E_i \end{array} \right.$ 
 $\dot{\theta}$  garde un signe constant  $\Rightarrow$  mouvement tournant continu.

$$= V(\theta = \pm\pi)$$



Note 1. pour  $E_i \ll 2mgl$ ,  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  restent faibles et  $\frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \theta^2) = E_i$  ie les trajectoires sont des ellipses.

Note 2. les trajectoires limites sont données par  $\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = 2mgl$  ou  $\left(\frac{\dot{\theta}}{2}\right)^2 = \frac{g}{l} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

2. Période pour  $E_i < 2mg$ :

$$dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \left[ \frac{e}{2g} \frac{1}{\cos\theta - \cos\theta_{lim}} \right]^{1/2} d\theta$$

$$T = 4 \left( \frac{e}{2g} \right)^{1/2} \int_0^{\theta_{lim}} \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_{lim})^{1/2}}$$

par symétrie.

Par le changement de variable

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_{lim}}{2} \sin \phi \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{2 \sin(\frac{\theta_{lim}}{2}) \cos \phi}{(1 - \sin^2(\frac{\theta_{lim}}{2}) \sin^2 \phi)^{1/2}} d\phi$$

$\theta \in [0, \theta_{lim}] \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

et  $(\cos \theta - \cos \theta_{lim})^{1/2} = \sqrt{2} \sin \frac{\theta_{lim}}{2} \cos \phi$ .

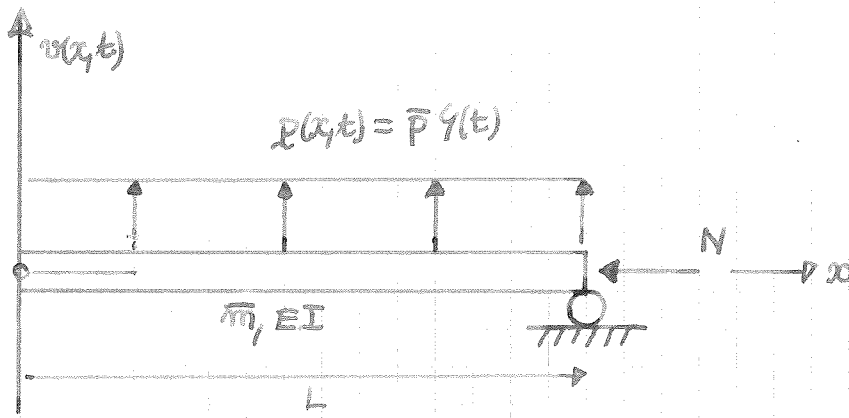
Finalement  $T$  apparaît sous la forme d'une intégrale elliptique

$$T = 4 \left( \frac{e}{g} \right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}, \quad k \equiv \sin \left( \frac{\theta_{lim}}{2} \right)$$

$$\approx 2\pi \left( \frac{e}{g} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\theta_{lim}^2}{16} + \dots \right) \quad \text{pour } \theta_{lim} \text{ faible.}$$



# Poutre hyperstatique : utilisation des multiplicateurs de Lagrange



Une poutre élastique non pesante est encasturée à une extrémité et repose sur un appui simple mobile horizontalement à l'autre extrémité. Elle est soumise à une charge  $p(x,t)$  et un effort normal constant  $N$ .

1. On approxime le déplacement transverse par deux 'modes' :

$$v(x,t) = q_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + q_2(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Montrer que  $q_1$  et  $q_2$  ne sont pas deux coordonnées généralisées

2. Calculer les énergies cinétique de translation verticale, potentielle de flexion et le travail virtuel dû au chargement  $p$  à l'aide de l'expression de  $v(x,t)$  ci-dessus.

3. Introduire un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte liant  $q_1$  et  $q_2$  et obtenir les équations de Lagrange.

Interpréter physiquement le multiplicateur de Lagrange.

1. Contrainte due à

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \Rightarrow \frac{d}{dx} (q_1(t) + 2q_2(t)) = 0 \Rightarrow q_1(t) + 2q_2(t) = 0.$$

2<sub>1</sub> Energie cinétique

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{v}^2(x,t) dx = \frac{\pi L}{2} \int_0^L \dot{q}_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} + \dot{q}_2^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{L} + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{\pi L}{4} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

2<sub>2</sub> Energie de flexion :

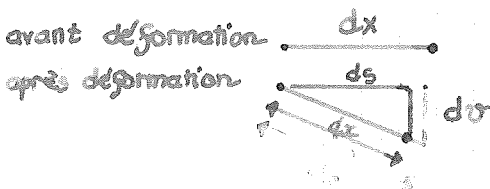
$$V_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L EI v''^2(x,t) dx$$

$$= \frac{EI}{2} \int_0^L q_1^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin^4 \left(\frac{\pi x}{L}\right) + q_2^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \sin^4 \left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 2q_1 q_2 \left(\frac{\pi}{L}\right) \left(\frac{2\pi}{L}\right) \sin \left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin \left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

2<sub>3</sub> due à la force N

$$V_{ext} = -N d$$

avec d déplacement horizontal de l'appui droit



$$ds^2 = dx^2 + d^2 \Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{ds}{dx} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Rightarrow s(L) = L + \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow d \approx \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d}{dx}\right)^2 dx$$

d'où :

$$V_N = -\frac{N}{2} \int_0^L q_1^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) + q_2^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 2q_1 q_2 \left(\frac{\pi}{L}\right) \left(\frac{2\pi}{L}\right) \cos \left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos \left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

$$\Rightarrow V = V_{int} + V_{ext} = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (q_1^2 + 16q_2^2) - \frac{N\pi^2}{4L} (q_1^2 + 4q_2^2).$$

2<sub>4</sub> Travail virtuel de la force non conservative

$$\delta W_{nc} = \int_0^L p(x,t) \delta v(x,t) dx = \frac{2L}{\pi} \bar{p}(t) \delta q_1 = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2.$$

$$\int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} dx = \frac{L}{\pi} \left(-\cos \frac{\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = \frac{2L}{\pi}$$

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi x}{L} dx = \frac{L}{2\pi} \left[-\cos \frac{2\pi x}{L}\right] \Big|_0^L = 0$$

3. On a une contrainte

$$f_1 = q_1(t) + 2q_2(t) = 0, \quad m=1.$$

les équations de Lagrange s'écrivent donc :

$$\frac{mL}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\pi^4 EI - \pi^2 N}{2L^3} & 0 \\ 0 & \frac{8\pi^4 EI - 2\pi^2 N}{L^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2L}{\pi} \bar{p}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$