Exercice 1.2. Cylindre en torsion (sans gravitation)

1) M_t étant constant suivant z, et le problème invariant par rotation $/z$, les $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$ sont nuls.

L'équation $\nabla \cdot \sigma = 0$ se simplifie :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0 \qquad (3)$$

2) Bord libre en $r = R$, avec normale unitaire $\underline{n} = \underline{e}_r$

$$\underline{\underline{\sigma}}(r=R) \cdot \underline{e}_r = \underline{0} \iff \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = \underline{0} \text{ en } r = R \qquad (4)$$

Aux extrémités, on ne sait pas précisément ce qui est imposé. On sait seulement que en $z = 0$ et $z =$

$$\int_S \underline{OM} \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z)\, dS = \underline{M}_t \qquad (5)$$

(définition du moment de torsion)

3) La RDM suggère sur les surfaces $\perp \underline{e}_z$ une contrainte orthoradiale dans le plan (θ, r) : $\underline{T} = \alpha r \, \underline{e}_\theta$

(une constante voir plus loin)

*1 c.à.d $$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = \begin{pmatrix} \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha r \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

*2 Pour fabriquer une solution qui satisfait l'équation (4) en $r = R$ il suffit de satisfaire (4) pour tout r (induction ...)

*3 Si $\sigma_{rr} = 0$ l'équation d'équilibre (1) impose $\sigma_{\theta\theta} = 0$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r \\ 0 & \alpha r & 0 \end{pmatrix}_{(r,\theta,z)}$$

*4 $\sigma_{\theta z}$ se déduit par symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$, comme $\sigma_{r\theta}$

$$\sigma : \begin{array}{ccc} *2 & *4 & *1 \\ \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} \boxed{0} \\ \boxed{0}^{\,*3} \\ \boxed{\alpha r}^{\,*4} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ \alpha r \\ 0 \end{matrix}\right) \end{array}$$

Pour satisfaire la condition $\displaystyle\int_S \underline{OM} \wedge \left(\underline{\underline{\sigma}}(M) \cdot \underline{n}\right) ds = \underline{M_t}$

aux extrémités, il faut $\displaystyle \underline{e_z} \times \int_S \alpha r^2 ds = \underline{e_z} \times M_t$

c.à.d $\displaystyle \alpha = \frac{M_t}{\int_S r^2 ds}$

En appellant "moment d'inertie I_0" $\displaystyle\int_S r^2 ds$ on

a la formule de RDM.

4) L'expression proposée pour $\underline{\underline{\sigma}}$ n'est exacte que si elle s'applique aussi en $z=0$ et $z=L$, ce qui dépends de la façon dont le moment est appliqué.

Techniquement, on peut coller une plaque rigide à chaque extrémité et imposer une rotation de l'une des deux pour produire un $\underline{\underline{\sigma}}$ tel que ci dessus.
Si on coince le cylindre entre des machoires qui compriment diamétralement, on aurait au contraire du σ_{rr} aux extrémités.

L'approximation de S^t Venant consiste à dire que dans un solide élancé ça ne fait pas une grande différence loin des extrémités.