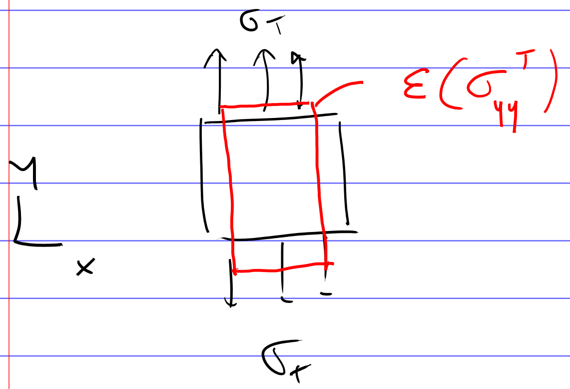
* Notation indicielle

- vecteur $\underline{v} \longleftrightarrow v_i$ (tenseur d'ordre 1)
- matrice $\underline{\underline{M}} \longleftrightarrow M_{ij}$
- tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \longleftrightarrow A_{ijkl}$
- produit scalaire : $\underline{u} \cdot \underline{v} \longleftrightarrow u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
- matrice × vecteur : $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} \longleftrightarrow M_{ij} u_j$
- $\mathcal{O}(4)$ × Matrice : $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \longleftrightarrow A_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

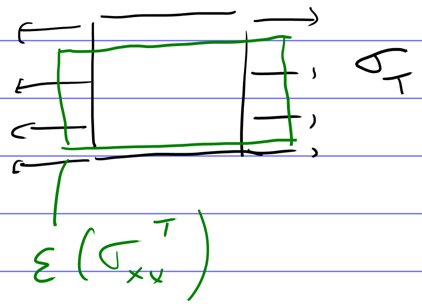
Convention d'Einstein : si un indice "k" est répété dans un produit, on fait la sommes des produits avec $k = 1, 2, 3$

- Symbole de Kroenecker : $\underline{\underline{\delta}} = \underline{\underline{Id}}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Isotropie : même réponse dans toutes les directions.



(Cas 1)



(Cas 2)

Si isotrope et

$$\sigma_{xx}^T = \sigma_{yy}^T \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(1)} = \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} = \varepsilon_{xx}^{(2)} \end{cases}$$

Linéarité : dans le cas (1) $\varepsilon(\beta \times \sigma_{yy}^T) = \beta\, \varepsilon(\sigma_{yy}^T)$

et en combinant (1) et (2) :

$$\longrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\beta\, \sigma_{yy}^T + \sigma_{xx}^T) = \beta\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\sigma_{yy}^T) + \underline{\underline{\varepsilon}}(\sigma_{xx}^T)$$

Si traction suivant x donne $\underline{\underline{\varepsilon}} : \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} \end{bmatrix}$

(on déduit E et ν d'un essais)

Tractions suivant x, y et z, par linéarité :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E}\left[\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma_{xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\nu\sigma_{yy} & & \\ & \sigma_{yy} & \\ & & -\nu\sigma_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\nu\sigma_{zz} & & \\ & -\nu\sigma_{zz} & \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \right]$$

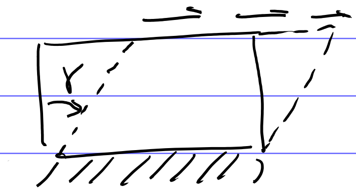
$$= \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \sigma_{xx}(1+\nu) - \nu\, tr(\sigma) & & \\ & \sigma_{yy}(1+\nu) - \nu\, tr\,\sigma & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \underbrace{\frac{\nu}{E} tr(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{Id}}}_{\text{terme sphérique}}}$$

CQFD

* Quelques exemples.

- Cisaillement simple :



$$\underline{\underline{\nabla u}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

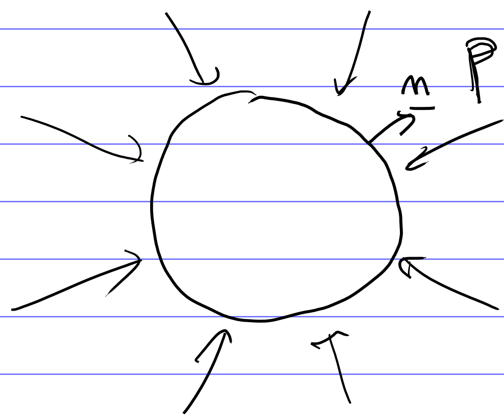
Rmq. $\operatorname{tr}(\varepsilon) = 0$

Hooke : $\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\cancel{\lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})}}_{=0} \underline{\underline{Id}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\gamma & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

module de cisaillement (aussi noté G)

- Compression isotrope (ou "hydrostatique")

"même pression en tout point de l'espace"



$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left(-p(1+\nu)\,\underline{\underline{Id}} + 3\nu p\,\underline{\underline{Id}} \right)$$

$$\varepsilon = -p \times \frac{(1-2\nu)}{E}\,\underline{\underline{Id}}$$

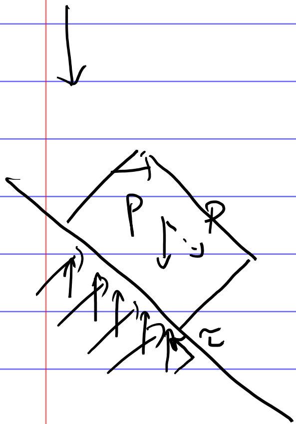
$$\varepsilon_v = tr\,\varepsilon = -\frac{3p}{E}(1-2\nu)$$

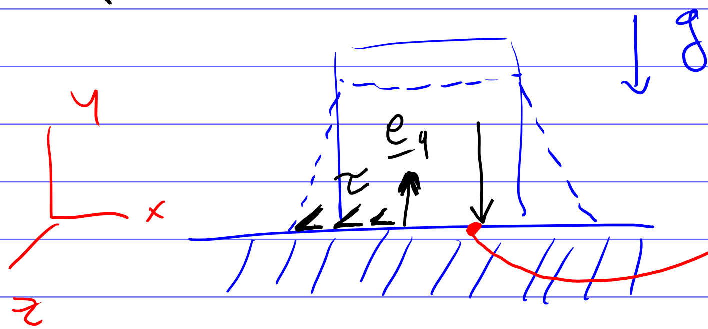
$$K = \frac{p}{\varepsilon_v} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$ si $\nu \to 0,5$, $\Rightarrow K \to +\infty$

("module de compressibilité")

* Conditions limites :

- statique ($\sigma \cdot n = \dots$) ("en contrainte")
- cinématique ($u = \dots$) ("en déplacement")
- mixte ($u_x = \dots, \sigma_{xy} = \dots, \sigma_{xz} = \dots$)





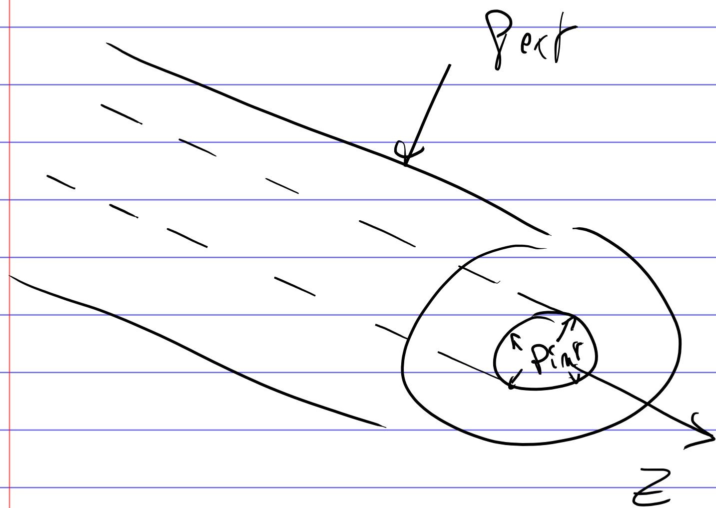
$$\begin{cases} u_y = 0 \\ \sigma_{xy} = \sigma_{zy} = 0 \end{cases}$$

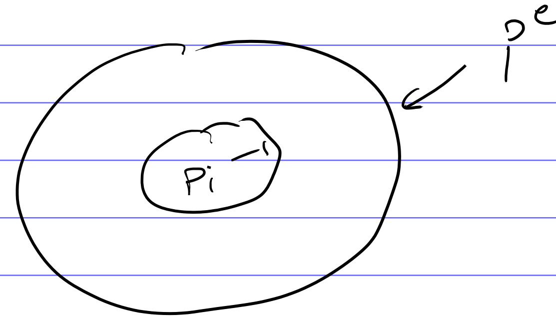
Ex. plan rigide non frottant

$$\sigma_{xy} = \sigma_{zy} = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{yy} \\ 0 \end{pmatrix}$$

σ_{ij} : composante "i" de la contrainte exercée dans la direction "j"





Hypothèse : le cylindre est très long et de ~~le~~ longueur constante

$\Rightarrow u_z = 0$ partout

Résolution "en déplacement" :

- Ecrire $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fc. $\underline{u}$
- Puis $\underline{\underline{\sigma}}$ en fct de $\underline{u}$
- Puis $\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0}$ en fonction de $\underline{u}$
- Résoudre l'équa. diff. (*)
- Trouver les constantes d'intégrations avec les CL

(*) Rmq : $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{1}{dr}(ru)\right)\right) = u'' + \frac{u'}{r} + \frac{u}{r^2}$ $\left(\begin{array}{l} u = \mathrm{fct}(r) \\ u' = \frac{du}{dr} \end{array}\right)$

\+ Expression directe de $\nabla \cdot \sigma$ en fonction du déplacement ($\vec{b}$ forces de volumes, $\vec{\gamma}$ accélération)

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{1-2\nu}\,\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{u}\right)+\overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\underline{\nabla}\,\vec{u}\right)\right]+\vec{b}=\rho\vec{\gamma} \tag{167}$$

Comme

$$\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{u}\right)=\overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\underline{\nabla}\,\vec{u}\right)+\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u}\right), \tag{168}$$

on peut aussi écrire les équations de Navier sous la forme

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{u}\right)-\frac{E}{2(1+\nu)}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u}\right)+\vec{b}=\rho\vec{\gamma} \tag{169}$$

$$\nabla \cdot \sigma = \nabla \cdot \left(\lambda(\nabla \cdot \underline{u})\,\underline{\underline{Id}} + 2\mu\left((\nabla + \nabla^t)u\right)\right)$$

$$tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \nabla \cdot \underline{u}$$

on a $\underline{\nabla} \cdot (\alpha\, \underline{\underline{Id}}) = \underline{\nabla}\alpha$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \sigma = \lambda \underline{\nabla}(\nabla \cdot \underline{u}) + 2\mu\, \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u})$$

(d'après p. 52 de mon brillant collègue B. Hartong, cours_elasticité_hartong.pdf sur Chamilo)