3. Loi de Hooke

Notation indicielle : $\underline{u} \longrightarrow u_i$

$\underline{\underline{\sigma}} \longrightarrow \sigma_{ij}$

$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \longrightarrow A_{ijkl}$

Convention d'Einstein : un indice répété implique la somme des produits correspondant :

Produit scalaire : $\underline{u} \cdot \underline{v} \longrightarrow u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Mat. x vecteur : $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} \longrightarrow M_{ij} u_j$

Symbole de Kronecker : $\underline{\underline{I}} \longrightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \left(\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{\delta}}\right)$

Trace : $tr(\underline{\underline{M}}) \longrightarrow M_{ii}$

* Démonstration loi de Hooke isotrope :

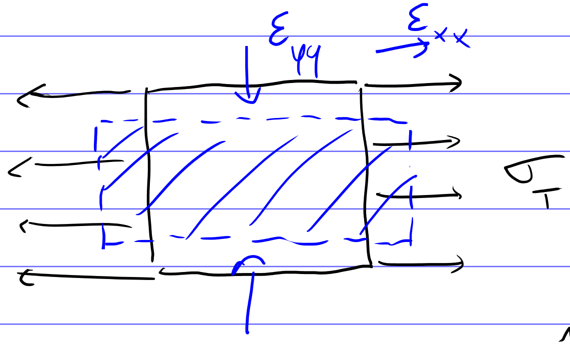
- on suppose la linéarité[(*)] $\underline{\underline{\sigma}} \leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^1 + \alpha \underline{\underline{\varepsilon}}^2)$

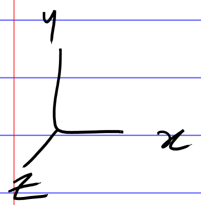
$$= \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^1) + \alpha \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2)$$

- et on suppose que la réponse est la même dans toutes les directions (pas d'orientation de la microstructure)

(*) même chose pour $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\sigma}})$

(1)

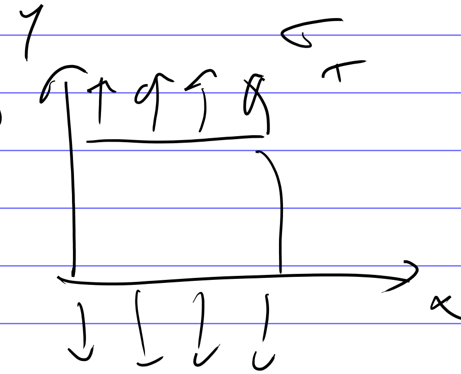




$$\underline{\underline{\sigma}}^1 : \begin{bmatrix} \sigma_T^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_T^1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_T^1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_T^1}{E} \end{bmatrix}$$

(2)



$$\underline{\underline{\sigma}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^2 = \begin{bmatrix} -\nu \frac{\sigma_T^2}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_T^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_T^2}{E} \end{bmatrix}$$

(3) ($\hat{m}$ chose suivant z).

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^3 = \begin{bmatrix} -\frac{\nu \sigma_T^3}{E} & & \\ & -\frac{\nu \sigma_T^3}{E} & \\ & & \frac{\sigma_T^3}{E} \end{bmatrix}$$

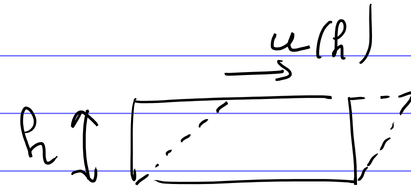
Si on impose simultanément $\sigma_T^1, \sigma_T^2, \sigma_T^3$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \sigma_T^1 - \nu(\sigma_T^2+\sigma_T^3) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T^2 - \nu(\sigma_T^1+\sigma_T^3) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_T^3 - \nu(\sigma_T^1+\sigma_T^2) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\;\underline{\underline{Id}}}$$

Quelques applications :

1) Cisaillement simple :



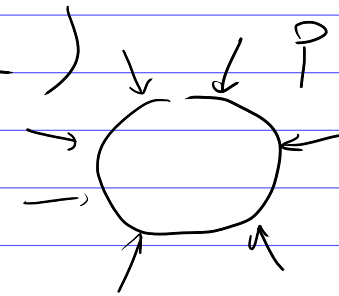
$$\rightarrow \nabla u = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u_{max}}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(\varepsilon) = 0 \qquad \rightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u}{2h} & 0 \\ \frac{u}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hooke : $\sigma = 2\mu\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \mu\gamma & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d'où le nom de μ : module de cisaillement aussi noté "G")

2) Compression isotrope (ou hydrostatique)



$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \sigma &= \lambda tr(\varepsilon) \underline{\underline{Id}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ tr\sigma &= 3\lambda tr\varepsilon + 2\mu tr\varepsilon \\ -3p &= (3\lambda + 2\mu) tr\varepsilon \end{aligned}$$

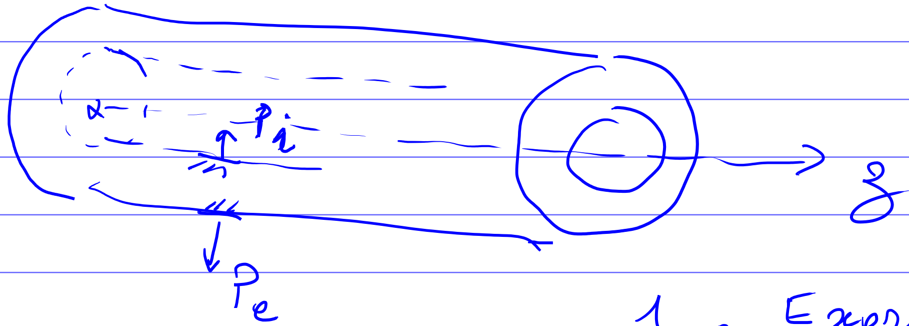
$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = tr\varepsilon = \frac{-3p}{3\lambda+2\mu} \rightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{p}{3\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{3\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{\dots} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}$$

* Cylindre creux

Si ~~infiniment long et~~ longueur totale constante on admet que $u_z = 0$



1. Exprimer l'équation d'équilibre avec invariances et symmétries
2. Injecter $\underline{u}$ dans $\mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ et obtenir une equa dif sur $\underline{u}$.

$\sigma_{r\theta} = 0$ par symétrie

Rmq : tout axe de symétrie définit un vecteur propre.

3. Déduire les constantes des conditions aux limite.

Remarque 1 : $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{f}{r}\right) = f' - \dfrac{f}{r}$ ~~(utile pour la suite)~~

Remarque 2 :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)\right) = \underbrace{u'' + \frac{u'}{r} + \frac{u}{r^2}}_{\text{ça devrait apparaître en calculant } \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}}$$

+ Expression directe de $\nabla \cdot \sigma$ en fonction du déplacement ($\vec{b}$ forces de volumes, $\vec{\gamma}$ accélération)

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{1-2\nu}\,\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{u}\right)+\overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\vec{u}\right)\right]+\vec{b}=\rho\vec{\gamma} \tag{167}$$

Comme

$$\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{u}\right)=\overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\vec{u}\right)+\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u}\right), \tag{168}$$

on peut aussi écrire les équations de Navier sous la forme

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{u}\right)-\frac{E}{2(1+\nu)}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u}\right)+\vec{b}=\rho\vec{\gamma} \tag{169}$$

(d'après p. 52 de mon brillant collègue B. Hartong, cours_elasticité_hartong.pdf sur Chamilo)